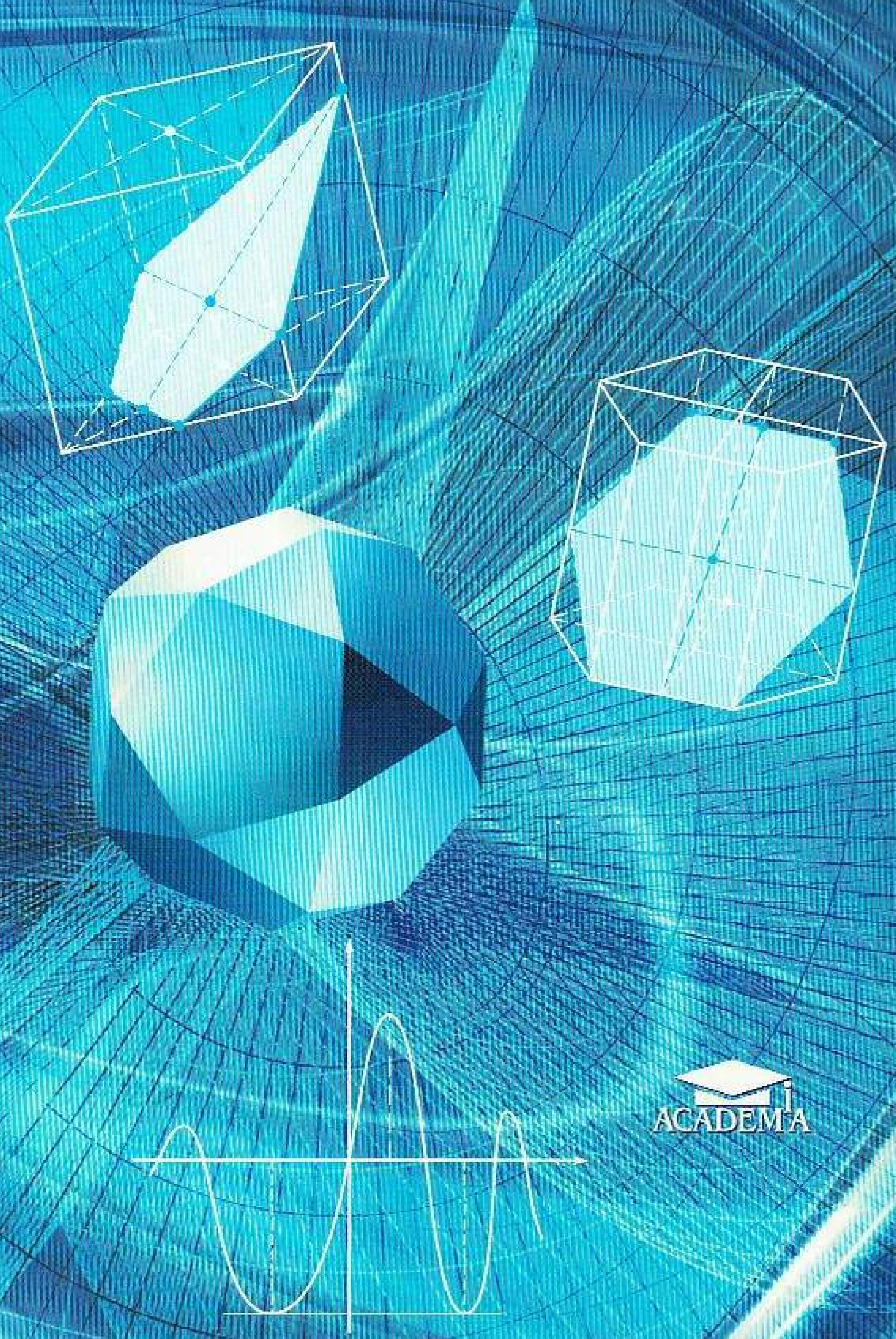
Профессиональное образование

М. И. Башмаков

Учебник

МАТЕМАТИКА



Общеобразовательные дисциплины

ACADEMA

ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

М. И. БАШМАКОВ

МАТЕМАТИКА

*Рекомендовано
Федеральным государственным учреждением
«Федеральный институт развития образования»
в качестве учебника для использования в учебном процессе
образовательных учреждений, реализующих программы
начального и среднего профессионального образования*

Регистрационный номер рецензии 174 от 28 апреля 2009 г. ФГУ «ФИРО»

9-е издание, стереотипное

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2014

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я722
Б336

Рецензенты:

преподаватель ГОУ СПО Московский политехнический колледж *Н.А.Харитонова*;
преподаватель математики и статистики ГОУ СПО Московский государственный техникум технологии, экономики и права им. Л.Б.Красина *Т.Н.Синилова*;
преподаватель математики ГОУ СПО Колледж автоматизации и информационных технологий № 20 г. Москвы *Т.Г.Кононенко*

Башмаков М.И.

Б336 Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И.Башмаков. — 9-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. — 256 с.

ISBN 978-5-4468-0742-0

Учебник написан в соответствии с программой изучения математики в учреждениях среднего профессионального образования и охватывает все основные темы: теория чисел, корни, степени, логарифмы, прямые и плоскости, пространственные тела, а также основы тригонометрии, анализа, комбинаторики и теории вероятностей.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я722

ISBN 978-5-4468-0742-0

Основные обозначения

Общематематические символы

$|a|$ — абсолютное значение (модуль) числа a

$[a]$ — целая часть числа a

$=$ — равно

$\approx$ — приближенно равно

$>$ — больше

$<$ — меньше

$\sqrt{\ }$ — корень квадратный

$\sqrt[n]{\ }$ — корень n-й степени

$\Rightarrow$ — следовательно

$\Leftrightarrow$ — равносильно, тогда и только тогда, когда

Комбинаторика

$n!$ — n факториал

A_n^m — число размещений из n по m

C_n^m — число сочетаний из n по m

P_n — число перестановок из n элементов

Множества

$\varnothing$ — пустое множество

$\mathbf{N}$ — натуральные числа

$\mathbf{Z}$ — целые числа

$\mathbf{Q}$ — рациональные числа

$\mathbf{R}$ — действительные числа

$\mathbf{C}$ — комплексные числа

$A \cup B$ — объединение множеств

$A \cap B$ — пересечение множеств

$a \in A$ — a принадлежит множеству A

$a \notin A$ — a не принадлежит множеству A

$g \circ f$ — композиция отображений f и g

Комплексные числа

i — мнимая единица

$\bar{z}$ — комплексное число, сопряженное к z

$|z|$ — абсолютное значение (модуль) комплексного числа z

Геометрия

$A(x;\ y)$ — точка A с координатами x и y

$a,\ b$ — прямые

$\alpha,\ \beta$ — плоскости

$a \parallel b$ — прямая a параллельна прямой b

$a \dot{-} b$ — прямая a скрещивается с прямой b

$a \perp b$ — прямая a перпендикулярна прямой b

$a \cap \alpha = P$ — прямая a пересекает плоскость α в точке P

$\alpha \parallel \beta$ — плоскость α параллельна плоскости β

$\alpha \perp \beta$ — плоскость α перпендикулярна плоскости β

$\mathbf{a},\ \overline{AB}$ — вектор

Последовательность и функции

$\{a_n\}$ — последовательность

Δf — приращение функции f

df — дифференциал функции f

$f'(x)$ — производная функции f в точке x

$\int f(x)dx$ — множество первообразных, или неопределенный интеграл функции f

$\int_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл функции f от a до b

Предисловие

Математика за 2500 лет своего существования накопила богатейший инструмент для исследования окружающего нас мира. Однако, как заметил выдающийся русский математик и кораблестроитель академик А. Н. Крылов, человек обращается к математике «не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами». Ему прежде всего нужно ознакомиться со «столетиями испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть».

Данная книга научит вас обращаться с такими математическими инструментами, как функции и их графики, геометрические фигуры, векторы и координаты, производная и интеграл. Несмотря на то что первое знакомство с большинством из этих понятий состоялось у вас раньше, книга представляет их заново. Это удобно для тех, кто немного забыл изучавшийся ранее материал, и полезно всем, так как даже в знакомых вещах обнаружатся новые стороны и связи.

Для облегчения работы с учебником самые важные положения и формулировки выделены. Большую роль играют иллюстрации, поэтому необходимо внимательно рассмотреть относящийся к тексту чертеж для лучшего понимания текста (еще в древности использовали этот способ изучения математики — рисовали чертеж и говорили: «Смотри!»).

Помимо несомненной практической ценности получаемых математических знаний изучение математики оставляет в душе каждого человека неизгладимый след. С математикой многие связывают объективность и честность, стремление к истине и торжеству разума. У многих на всю жизнь остается уверенность в своих силах, возникшая при преодолении тех несомненных трудностей, которые встретились при изучении математики. Наконец, большинство из вас открыто к восприятию той гармонии и красоты мира, которые вобрала в себя математика, поэтому не стоит к каждой странице учебника, к каждой задаче подходить с оценкой, будет ли это использоваться в той новой жизни, которая ждет вас после окончания учебы.

Темы, которым посвящен учебник, — теория чисел, пространственные тела, основы математического анализа, начала теории вероятностей — имеют не только прикладное значение. Они содержат богатые идеи, ознакомление с которыми необходимо каждому человеку.

Хочется надеяться, что изучение математики, которому должен помочь учебник, позволит вам убедиться в высоком уровне своих возможностей, укрепит желание продолжать свое образование и доставит много радостных минут общения с «незыблемыми законами, которыми отмечен весь порядок мироздания».

ГЛАВА 1
Развитие понятия о числе

Занятие 1
Целые и рациональные числа

Что мы знаем о числе?

1. *Натуральные числа*. Натуральные числа строятся конструктивно, начиная с единицы, прибавлением на каждом шаге одной единицы: $1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ \ldots$

Запись натуральных чисел имеет длинную историю. Современное общество пользуется *десятичной системой*, в которой введены 10 цифр: $1,\ 2=1+1,\ 3=2+1,\ \ldots,\ 9=8+1$ и 0. Число, следующее за числом 9, записывается в виде 10. Далее, считая десятками, сотнями (10×10), тысячами и т. д., каждое натуральное число представляем в виде $a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_k \cdot 10^k$ ($a_k \neq 0$), где $0 \le a_i \le 9$, и записываем последовательностью цифр $a_k a_{k-1} \ldots a_0$.

В информатике большую роль играет *двоичная система*, использующая две цифры: 0 и 1 — и основанная на представлении числа в виде суммы степеней числа 2, которое в двоичной системе имеет запись 10.

2. *Целые числа*. Получаются из натуральных добавлением нуля и *отрицательных чисел*.

Множество натуральных чисел обозначается буквой **N**, целых чисел — буквой **Z**. Ясно, что $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, т.е. это означает, что всякое натуральное число одновременно есть целое.

3. *Рациональные числа*. Положительные рациональные числа можно получить, считая

Год первого издания этого учебника по-разному запишется в разных системах счисления

- Десятичная система

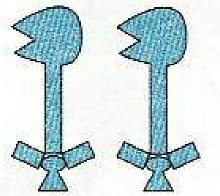
  2010

- Римская система

  MMX

- Иероглифическая система древних египтян

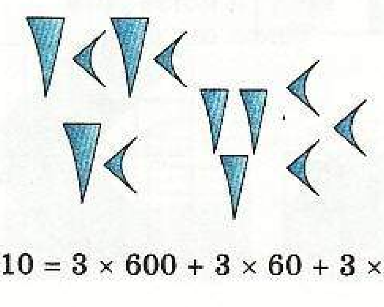
  (≈ 3000 г. до н.э.)



$2010 = 2 \times 1000 + 10$

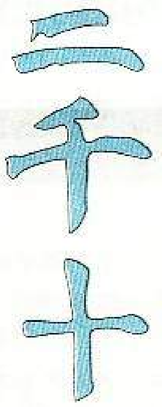
- Вавилонская (шестидесятеричная) система

  (≈ 3500 г. до н.э.)



$2010 = 3 \times 600 + 3 \times 60 + 3 \times 10$

• Иероглифическая система Китая

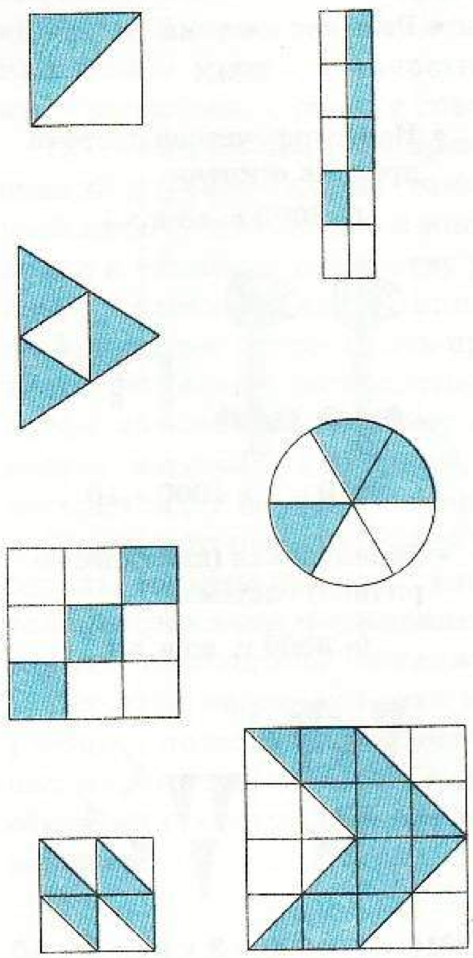


$$2010 = 2 \times 1000 + 10$$

• Двоичная система

$$11111011010$$

Какой дробью можно представить закрашенную часть фигуры?



доли единицы: m раз взятая n-я доля единицы (m и n — натуральные числа) есть рациональное число. Его можно записать в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. Одно и то же количество можно получить, используя разные доли. Например, ясно, что $\frac{1}{2}$ пирога и $\frac{2}{4}$ пирога — одно и то же.

Две обыкновенные дроби $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ равны между собой (т.е. являются записями одного и того же рационального числа) тогда и только тогда, когда совпадают натуральные числа $m_1 n_2$ и $m_2 n_1$: $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Построив положительные рациональные числа, к ним обычным образом добавляют отрицательные и нуль.

Множество рациональных чисел обозначается буквой $\mathbf{Q}$.

Целые числа m отождествляются с дробями $\frac{m}{1}$.

Имеют место включения $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

4. В множестве рациональных чисел $\mathbf{Q}$ определены две *арифметические операции* — сложение и умножение, подчиняющиеся известным законам — переместительному, сочетательному, распределительному.

Зачем людям понадобились числа?

Прежде всего, для *счета*. Для сравнения количества предметов сначала использовались некоторые стандартные объекты (пальцы, камешки, палочки). Затем были придуманы символы для обозначения количества в наборах (коллекциях, множествах), имеющих *поровну* предметов.

Другим источником развития понятия числа явились задачи *измерения*. При выборе *единицы измерения* какой-либо величины (например, длины) появляется возможность сравнения с ней. При этом можно использовать не только целую единицу, но и ее доли.

Почему можно смело пользоваться обыкновенными дробями при вычислениях с рациональными числами?

Как было отмечено, одно и то же рациональное число может быть записано разными дробями. Связь между ними описывается следующей теоремой.

Теорема. Если $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ и $\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3}$, то $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_3}{n_3}$.

Доказательство. Требуется доказать, что $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_3}{n_3}$. По определению равенства дробей для этого нужно проверить равенство целых чисел: $m_1n_3 = m_3n_1$. Используем данные равенства: $m_1n_2 = m_2n_1$ и $m_2n_3 = m_3n_2$. Умножим первое из них на n_3, а второе — на n_1.

Получим

$$m_1n_2n_3 = m_2n_1n_3,\ m_2n_3n_1 = m_3n_2n_1.$$

Целые числа $m_2n_1n_3$ и $m_2n_3n_1$ равны между собой; используем свойство транзитивности целых чисел: $m_1n_2n_3 = m_2n_1n_3$; $m_2n_3n_1 = m_3n_2n_1 \Rightarrow m_1n_2n_3 = m_3n_2n_1$. Равенство целых чисел $m_1n_2n_3 = m_3n_2n_1$ перепишем в виде $n_2(m_1n_3 - m_3n_1) = 0$. Число n_2 (знаменатель средней дроби) не может быть равно нулю. Однако, если произведение двух целых чисел равно нулю, то хотя бы одно из них должно быть нулем. Получаем, что $m_1n_3 - m_3n_1 = 0$, т.е. $m_1n_3 = m_3n_1$, что и требовалось доказать.

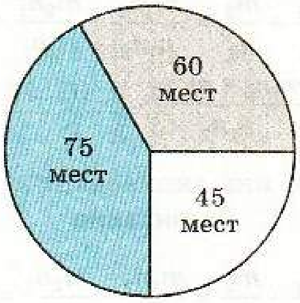
Как выполняют арифметические действия над обыкновенными дробями?

1. *Сокращение дроби.*

Пример. Дробь $\frac{28}{60}$ можно *сократить*. Это можно делать последовательно, обнаруживая общие множители у числителя и знаменателя и деля на них:

$$\frac{28}{60} = \frac{2\cdot 14}{2\cdot 30} = \frac{14}{30} = \frac{2\cdot 7}{2\cdot 15} = \frac{7}{15},$$

Круговая диаграмма



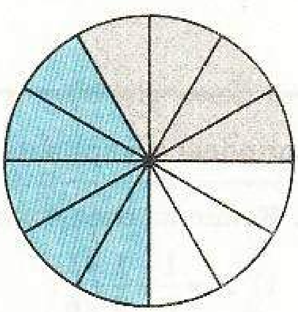
Круговая диаграмма показывает распределение голосов в парламенте между тремя партиями — синими, серыми и белыми.

Это распределение можно записать дробями:

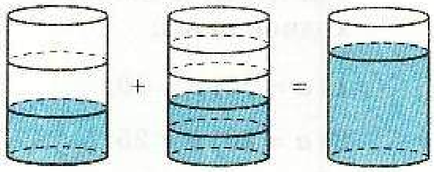
$75 + 60 + 45 = 180$ — общее число мест;

$$\frac{75}{180} = \frac{5}{12};\ \frac{60}{180} = \frac{1}{3};$$
$$\frac{45}{180} = \frac{1}{4}.$$

В качестве общей доли можно выбрать $\frac{1}{12}$:



Какая часть объема колбы заполнится при сливании жидкостей из двух таких же колб?



Сложение

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2}{n_1n_2}+\frac{m_2n_1}{n_2n_1}=$$
$$=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$$

Вычитание

$$\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2}{n_1n_2}-\frac{m_2n_1}{n_1n_2}=$$
$$=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{n_1n_2}$$

Умножение

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$$

Деление

$$\frac{m_1}{n_1}:\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2}{m_2n_1}$$

а можно сделать сразу, разделив числитель и знаменатель на их наибольший общий делитель (НОД):

$$\frac{28}{60}=\frac{4\cdot 7}{4\cdot 15}=\frac{7}{15}.$$

Дробь $\frac{7}{15}$ *несократима*. Ее числитель и знаменатель — *взаимно простые числа*.

2. *Сложение (вычитание) дробей.*

Пример. $\frac{5}{12}+\frac{3}{10}$. Для сложения нужно привести дроби к *общему знаменателю*. Для этого удобно разложить знаменатели на простые множители и взять их наименьшее общее кратное (НОК): $12 = 2^2\cdot 3$; $10 = 2\cdot 5$. $\text{НОК}(12;\ 10) = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60$.

$$\frac{5}{12}+\frac{3}{10}=\frac{5\cdot 5}{60}+\frac{3\cdot 6}{60}=\frac{25+18}{60}=\frac{43}{60}.$$

3. *Умножение (деление) дробей.*

Пример. $\left(\frac{12}{25}\cdot\frac{5}{63}\right):\frac{2}{7}$. Записываем результат в виде одной дроби и сокращаем ее:

$$\frac{12\cdot 5\cdot 7}{25\cdot 63\cdot 2}=\frac{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 2}=\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{2}{15}.$$

? Вопросы и упражнения

1. Какие из следующих выражений имеют значение, равное 1:

1) $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;

2) $A=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{12}{7}$;

3) $A = 2{,}36 - 1{,}12 - 0{,}88 + 0{,}64$;

4) $A=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{1}$;

5) $A=\frac{95}{(12-7)(12+7)}$;

6) $A=\frac{33^2-32^2}{55}$;

7) $A=\frac{10^3-9^3}{91}$?

2. Стоимость товара в первый раз снизили на a %, во второй раз — на b % от новой цены. В каких случаях в результате стоимость товара составила 60 % исходной цены:

1) $a = 20$; $b = 20$;

2) $a = 20$; $b = 25$;

3) $a = 25$; $b = 20$;

4) $a = 40$; $b = 0$;

5) $a = 66\frac{2}{3}$; $b = 10$?

3. Вычислите с помощью калькулятора значения следующих числовых выражений:

1) количество «счастливых» автобусных билетов:

$$\frac{32}{5}\cdot\frac{31}{4}\cdot\frac{30}{3}\cdot\frac{29}{2}\cdot\frac{28}{1}-6\cdot\frac{22}{5}\cdot\frac{21}{4}\cdot\frac{20}{3}\cdot\frac{19}{2}\cdot\frac{18}{1}+\frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{8}{1};$$

2) вероятность того, что в классе из 30 человек есть совпадающие дни рождения:

$$\left(1-\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{336}{365}\right)\cdot100\,\%.$$

4. Оцените, к какому из указанных чисел ближе всего число $\dfrac{180\cdot1{,}6\cdot25}{91\cdot8000}$:

1) 0,001; 2) 0,01; 3) 0,1; 4) 1.

5. В таблице указаны точки плавления льда и кипения воды в четырех температурных шкалах — Цельсия (C), Фаренгейта (F), Кельвина (K) и Реомюра (R). Считая, что температура человеческого тела в градусах Цельсия равна 37, вычислите ее в других шкалах, если зависимость между шкалами линейная:

Показатель	Шкала			
	C	F	K	R
Кипение воды	100	212	373	80
Плавление льда	0	32	273	0

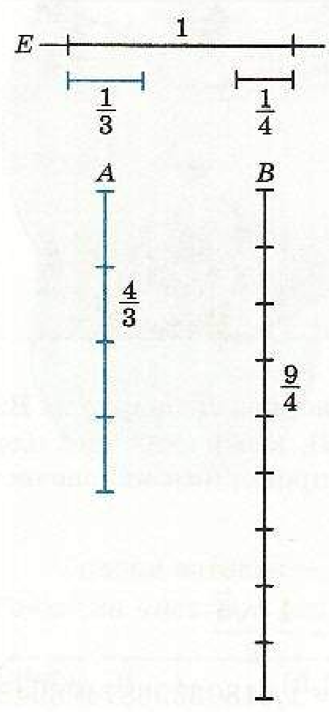
Занятие 2
Действительные числа

Что понимается под действительным числом?

1. *Действительное число.* Рациональных чисел оказалось недостаточно для решения задач измерения. Это было обнаружено более 2,5 тыс. лет назад древнегреческими математиками, которые доказали, что диагональ квадрата с единичной стороной не может быть измерена, если использовать только рациональные числа, а другие тогда не были известны.

Как для задания натуральных чисел можно использовать конкретные объекты (пальцы, палочки), так и для задач измерения можно выбрать стандартную величину — длину отрезка — и задавать числа геометрически — отрезками, а точнее их отношениями к выбранному единичному отрезку (единице масштаба).

Общая мера



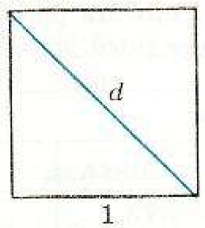
$$\frac{A}{E}=\frac{4}{3};\quad \frac{B}{E}=\frac{9}{4};$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{9}{4}}=\frac{4\cdot 4}{9\cdot 3}=\frac{16}{27};$$

$C=\frac{1}{12}E$ — общая мера отрезков A и B.

$A = 16C$; $B = 27C$

Диагональ квадрата



$d=\sqrt{2}$

$d = 1{,}41421356...$

Золотое сечение

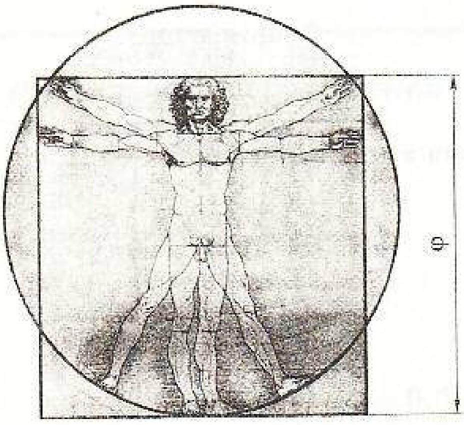


Рисунок Леонардо да Винчи (1492), изображающий идеальные пропорции человеческого тела.

φ — золотое число

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\varphi = 1{,}618033988749894848...$

Если (вслед за древними греками) назвать числом отношение отрезка к единичному, то возникнет задача *записи числа*. Удобна запись числа в виде десятичной дроби, отражающей некоторый процесс измерения. Например, измеряя диагональ квадрата со стороной 1, мы сначала отложим целый единичный отрезок и получим число 1. В остатке (он меньше 1) будем откладывать десятую часть единичного отрезка. Она отложится 4 раза, и останется отрезок длины, меньшей $\frac{1}{10}$. Мы получили десятичную дробь 1,4. Затем делим одну десятую снова на 10 частей, откладываем новый отрезок в остатке и записываем результат. Получим последовательность десятичных дробей с увеличивающимся количеством знаков после запятой: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... .

Эту последовательность удобно представлять в виде одной бесконечной десятичной дроби 1,414213562373095..., которую и можно считать *числом*. Итак, по определению

> *Действительное число* — это бесконечная десятичная дробь.

2. *Конечная десятичная дробь.* Рациональное число, представленное дробью, в знаменателе которой стоят только двойки и пятерки, запишется конечной десятичной дробью, так как на каком-то шаге десятичный процесс измерения закончится — некоторая доля единичного отрезка отложится в остатке целое число раз.

Например, $\frac{71}{250}=0{,}28400...=0{,}284.$

Если у несократимой дроби $\frac{m}{n}$ в знаменателе есть простые числа, отличные от 2 и 5, то процесс десятичного измерения станет *периодическим*, и цифры (одна или несколько) начнут периодически повторяться. Например, $\frac{35}{6}=5{,}8333...,\ \frac{37}{11}=3{,}363636...$

3. *Иррациональные числа* — это числа, не являющиеся рациональными. Они записываются бесконечными непериодическими деся-

тичными дробями. Примерами иррациональных чисел являются числа $\sqrt{2}$, пятнадцать знаков которого после запятой было приведено выше, или число π (отношение длины окружности к диаметру): $\pi = 3{,}1415926536...$.

Множество всех действительных чисел обозначается буквой $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Зачем понадобились действительные числа, и хватило ли их для решения задач?

Как было отмечено, добавление к рациональным числам новых, иррациональных чисел было вызвано необходимостью измерять длины любых отрезков. С помощью так построенных *действительных чисел* уже оказалось можно измерять многие другие величины, которые были названы *скалярными*.

Появление новых задач потребовало дальнейшего развития понятия числа, которое мы обсудим позже.

Почему диагональ квадрата со стороной, равной единице, нельзя измерить рациональным числом?

В этом вопросе содержится формулировка знаменитой теоремы, доказанной в VI в. до н. э.

Доказательство. Предположим, что длину диагонали единичного квадрата можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, которую будем считать несократимой. По теореме Пифагора получаем равенство $1^2 + 1^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$, т. е. $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, или $m^2 = 2n^2$.

Так как справа стоит четное число, то и слева число m^2, а значит, и число m являются четными числами: $m = 2k$. Подставляя и сокращая на 2, получаем: $2k^2 = n^2$. Таким же рассуждением получаем, что теперь n тоже должно быть четным числом. То, что у дроби

Различные способы записи действительных чисел

Десятичная дробь

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857...$$

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}70796267...$$

Непрерывная дробь

$$\frac{8}{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$$

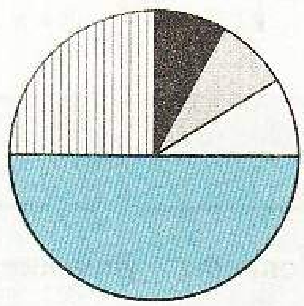
$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}$$

Ряд

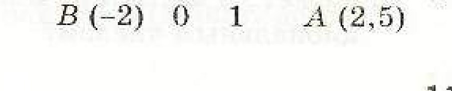
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} + ...$$

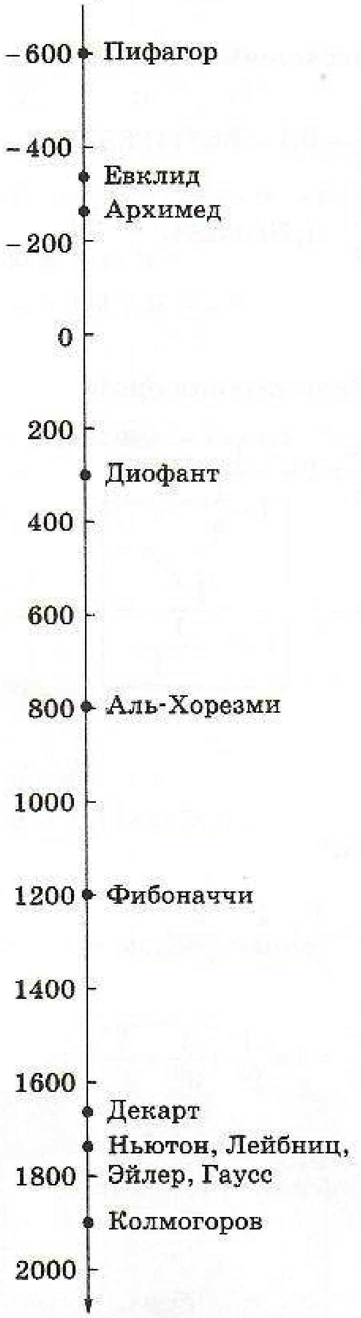
Круговая диаграмма



Точка на числовой оси



Великие математики на оси времени



$\frac{m}{n}$ числитель и знаменатель оказались четными числами, противоречит условию несократимости дроби. Это противоречие доказывает теорему.

Как работают с действительными числами?

Бесконечная десятичная дробь — это последовательность приближений конечными десятичными дробями к данному действительному числу. Для выполнения арифметических операций над бесконечными десятичными дробями эти операции делаются над конечными десятичными дробями. Например, будем складывать $\sqrt{2} + \pi = 1{,}41421... + 3{,}14159...$

Получаем:
$$1 + 3 = 4$$
$$1{,}4 + 3{,}1 = 4{,}5$$
$$1{,}41 + 3{,}14 = 4{,}55$$
$$1{,}414 + 3{,}141 = 4{,}555$$
$$1{,}4142 + 3{,}1415 = 4{,}5557$$
$$1{,}41421 + 3{,}14159 = 4{,}55580 \text{ и т. д.}$$

Аналогично $\pi \cdot \sqrt{2} = 4{,}4428829...$

Разумеется, такие вычисления нужно выполнять с помощью калькулятора, но при этом следить, сколько цифр результата можно считать верными.

Действительные числа можно изобразить точками на *числовой оси*.

Если два числа a и b изображены точками $A(a)$ и $B(b)$ на числовой оси, то расстояние между точками A и B равно *модулю разности* чисел a и b: $|AB| = |b - a|$.

Для модуля выполняются два важнейших *свойства*:

$$|ab| = |a| \cdot |b| \text{ и } |a + b| \le |a| + |b|.$$

? Вопросы и упражнения

1. Всякое ли целое число является рациональным?
2. Является ли число $\sqrt{0{,}64}$ иррациональным?
3. Всегда ли сумма рациональных чисел является рациональным числом?
4. Может ли при сложении иррациональных чисел получиться рациональное число?
5. Может ли частное от деления рационального числа на иррациональное быть рациональным числом?

6. Всегда ли квадрат иррационального числа является рациональным числом?
7. Запишите следующие числа в виде периодических десятичных дробей:

1) $\frac{7}{25}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{8}{15}$; 6) $\frac{41}{30}$.

8. Докажите иррациональность следующих чисел:
1) 0,101001000100001...; 2) 0,12345678910111213...

Занятие 3
Приближенные вычисления

Что полезно знать о приближенных вычислениях?

1. *Приближенное значение.* Пусть дано число x.

Число a называется *приближенным значением* числа x, вычисленным с точностью до $h > 0$, если выполняется неравенство $|x - a| < h$.

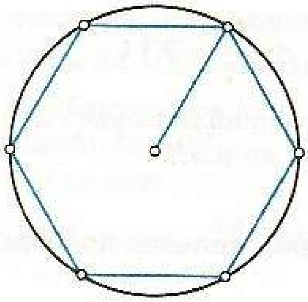
Разность $|x - a|$ называют погрешностью, а h — оценкой погрешности приближенного вычисления.

2. *Относительная погрешность.* Пусть a является приближенным значением величины x, вычисленным с погрешностью h, т.е. пусть $|x - a| = h$. Отношение погрешности к приближенному значению, т.е. число $r = \frac{h}{a} = \frac{|x-a|}{a}$, называют *относительной погрешностью* вычисления. Так, если среднее расстояние от Земли до Солнца вычислено приближенно как $1{,}496 \cdot 10^8$ км с погрешностью $< 10^5$ км, то относительная погрешность такого вычисления будет меньше 0,0007, потому что $\frac{10^5}{1{,}496 \cdot 10^8} < 0{,}0007$. Часто относительную погрешность (а точнее, оценку для нее) указывают в процентах.

3. *Стандартная запись.* Приближенные значения величины часто указывают в так называемой стандартной записи. Положительные числа в стандартной записи представляют

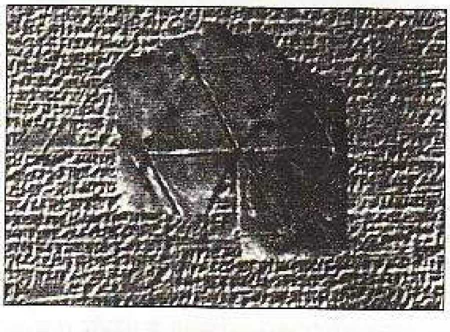
Приближения к π

1. $\pi \approx 3$



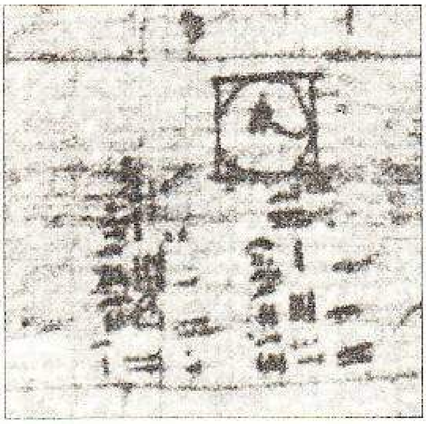
Такое приближение упоминается в Библии (строительство храма Соломона).

2. $\pi \approx 3 + \frac{432}{3100} = 3{,}12$



Это приближение древнего Вавилона (2000 г. до н.э.).

3. $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16$

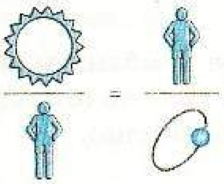


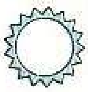
Это приближение взято из древнеегипетского папируса (1650 г. до н.э.).

4. $\pi \approx \frac{22}{7} = 3{,}14...$

Это приближение Архимеда (250 г. до н.э.).

Поразительная пропорция



 — Солнце

 — человек

 — атом водорода

Зная приближенные массы:
Солнца — $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ кг;
человека — 60 кг;
атома водорода — $1{,}674 \times \times 10^{-27}$ кг,
оцените точность поразительной пропорции.

Вычислите, какой надо принять среднюю массу человека, чтобы пропорция была верной до второго знака.

в виде: $a \cdot 10^k$, где число a выбирают так, чтобы оно лежало в промежутке $[1; 10)$, т.е. удовлетворяло неравенствам $1 \le a < 10$, и записывалось десятичной дробью с несколькими знаками после запятой. Число a в стандартной записи x называют *мантиссой* числа x, а показатель k — его *порядком*.

Зачем точные значения величины заменяют ее приближенным значением?

Прежде всего потому, что вычислить и записать точное значение величины не удается — всегда при измерении величины можно найти ее значение лишь с некоторой точностью.

Кроме того, точная информация бывает излишней — нам часто достаточно знать лишь порядок числа, степень его близости к другим, более просто записываемым числам.

Почему при вычислениях с приближенными значениями накапливается ошибка?

1. *Погрешность суммы.* Если $|x - a| < h_1$ и $|y - b| < h_2$, то $|(x + y) - (a + b)| < h_1 + h_2$.

Действительно, запишем $(x + y) - (a + b)$ как $(x - a) + (y - b)$ и применим неравенство для модуля суммы.

Полученное неравенство означает, что при сложении приближенных значений складываются оценки погрешностей, и оценка погрешности суммы тем самым увеличивается.

2. *Погрешность произведения.* Если a и b — приближенные значения величин x и y и нам известны оценки погрешностей $|x - a| < h_1$ и $|y - b| < h_2$, то оценка погрешности для произведения не будет выражаться только через оценки h_1 и h_2, как это имеет место при сложении. Выполним преобразования:

$$xy - ab = xy - bx + bx - ab = \\ = x(y - b) + b(x - a).$$

Получим, что $|xy - ab| \le |x|\,|y - b| + |b|\,|x - a| < |b|\,h_1 + |x|\,h_2$.

Видим, что оценки погрешностей h_1 и h_2 приходится умножать на значения самой величины (или близкие к ней).

Как можно описать точность вычислений?

1. *«Плюс-минус»*. Часто говорят так: «Температура равна 16 плюс-минус один градус» и записывают: $t = (16 \pm 1)$ °C. Это означает, что истинное значение температуры (в градусах Цельсия) отличается от 16 не более чем на единицу. Эту же информацию можно записать в виде неравенства

$16 - 1 < t < 16 + 1$, или с помощью расстояния: $|t - 16| < 1$.

Здесь 16 — приближенное значение температуры, 1 — оценка погрешности. Относительная погрешность равна $\frac{1}{16} = 0{,}0625$, т. е. 6,25 %.

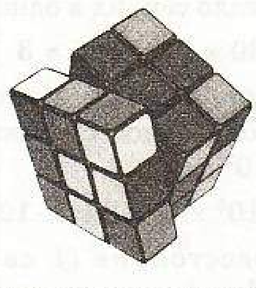
2. *«С точностью до...»*. Если вы скажете, что площадь комнаты равна 22,6 м^2 с точностью до двух десятых квадратного метра, то всем будет ясно, что площадь S лежит в промежутке $22{,}4 < S < 22{,}8$ м^2, или иначе, что расстояние истинного значения площади до числа 22,6 меньше 0,2, т. е.

$$|S - 22{,}6| < 0{,}2 \text{ м}^2.$$

Видим, что этот способ фактически совпадает с первым, и можно с таким же успехом записать: $S = 22{,}6 \pm 0{,}2$ м^2 и сказать, что площадь вычислена с оценкой погрешности в 0,2 м^2, что дает относительную погрешность, равную $\frac{0{,}2}{22{,}6} \approx 0{,}088$, т. е. 9 %.

3. *«Лежит между»*. Фраза «скорость автомобиля лежит между 50 и 60 километрами в час» сразу определяет промежуток, где находится значение скорости v: $50 < v < 60$. Можно, конечно, взять середину этого промежутка и перейти к обсуждавшимся ранее способам записи:

Кубик Рубика



Число различных конфигураций кубика Рубика записывается 20-значным числом

43 252 003 274 489 856 000.

Строя новую конфигурацию за одну секунду, за сколько веков можно перебрать все конфигурации?

Решение:

1) число секунд в одном годе: $60 \times 60 \times 24 \times 365 \approx 3 \cdot 10^7$ с;

2) приближенное число конфигураций: $43 \cdot 10^{18}$;

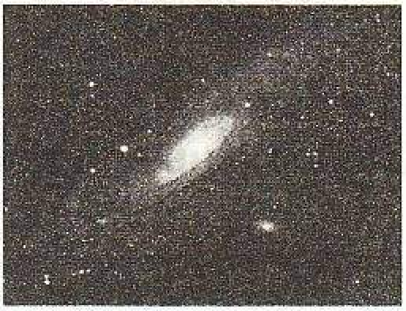
3) число лет:

$$43 \cdot 10^{18} : 3 \cdot 10^7 = \frac{43}{3} \cdot 10^{11} \approx$$
$$\approx 1{,}4 \cdot 10^{12} \text{ лет};$$

4) число веков:

$$1{,}4 \cdot 10^{12} : 100 = 1{,}4 \cdot 10^{10} \approx$$
$$\approx 14 \text{ млрд веков}.$$

Туманность Андромеды



Скорость света:

$c \approx 299\,792{,}458$ км/с.

Туманность Андромеды отстоит от Земли на 2 300 000 световых лет ($2{,}3 \cdot 10^6$ св. лет). Найти приближенное расстояние от Земли до туманности Андромеды в километрах.

Решение:

1) число секунд в одном годе:

$$60 \times 60 \times 24 \times 365 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ с};$$

2) приближенное число километров в одном световом году ($c \approx 3 \cdot 10^5$ км/с):

$$3 \cdot 10^5 \times 3 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^{12};$$

3) расстояние (1 св. год = $= 9 \cdot 10^{12}$ км):

$$2{,}3 \cdot 10^6 \times 9 \cdot 10^{12} \approx 2 \cdot 10^{19} \text{ км}.$$

$$v = 55 \pm 5 \text{ (км/ч)},$$

$$|v - 55| < 5 \text{ км/ч}.$$

Величина 5 км/ч, равная разности (60 – – 5) = 5 км/ч, дает оценку погрешности приближенного вычисления скорости, а число $\frac{5}{55} \approx 0{,}09$, т.е. отношение погрешности к приближенному значению, — оценку относительной погрешности.

Вопросы и упражнения

1. Изобразите на числовой оси следующие числа:

1) 3,5; 2) –2,2; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{5}{3}$; 6) $-\frac{22}{7}$.

2. Изобразите на числовой оси следующие промежутки:

1) $(0,\ 2]$; 2) $(-\infty,\ -3]$; 3) $\le x \le 4$; 4) $x > 3\sqrt{2}$.

3. Под знаком корня записано число с 40 девятками после запятой $\sqrt{0{,}99\ldots9}$. Вычислите корень с 40 знаками после запятой.

4. Проверьте, что округление следующих чисел с точностью до второго знака после запятой сделано правильно:

1) $a = 1{,}1683$, $a \approx 0{,}17$; 3) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$; 5) $\pi^2 \approx 9{,}86$.

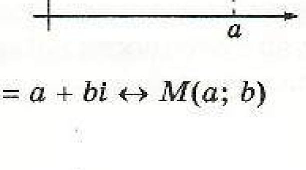
2) $a = 0{,}2309$, $a \approx 0{,}23$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86$;

5. Верно ли, что относительная погрешность произведенного вычисления менее 1%:

1) $\pi \approx 3{,}16$; 2) $2^{10} \approx 1000$; 3) площадь круга радиуса $3 \cdot 10^3$ примерно равна $3 \cdot 10^7$; 4) $\sqrt[3]{10\,000} \approx 21$; 5) $9^{11} \approx 3 \cdot 10^{10}$?

Занятие 4
Комплексные числа

Графическое изображение комплексных чисел



$z = a + bi \leftrightarrow M(a;\ b)$

Что такое комплексное число и как выполняются арифметические действия с комплексными числами?

1. *Комплексные числа.*

> *Комплексным числом* называется число вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — символ, называемый мнимой единицей.

Множество комплексных чисел обозначают буквой **C**.

Действительное число a отождествляют с комплексным числом $a + 0 \cdot i$. Тем самым мы расширяем цепочку включений различных числовых множеств: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Каждое комплексное число z — это некоторый символ вида $a + bi$. Число a называется *действительной частью* числа z, а число b — его *мнимой частью*.

Определение сложения показывает, что при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части.

2. *Правила сложения и умножения комплексных чисел.* Комплексные числа складывают по следующему правилу:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i.$$

По правилу умножения $i \cdot i = (0 + i) \cdot (0 + i) = -1$, т.е. *квадрат мнимой единицы равен действительному числу* -1. При умножении комплексных чисел просто раскрывают скобки по обычным правилам и заменяют i^2 на -1:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

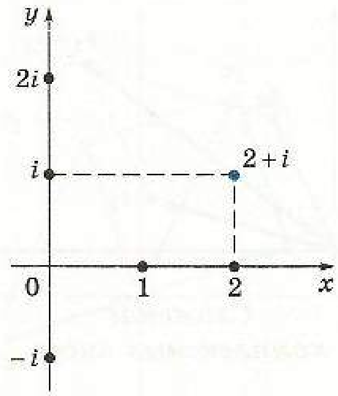
Обратим внимание на то, что не только $i^2 = -1$, но и $(-i)^2 = -1$.

3. *Сопряженные комплексные числа.* Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ называют *сопряженными* друг с другом. Их произведение равно действительному положительному числу $a^2 + b^2$. Если $z = a + bi \neq 0$, то $a^2 + b^2 \neq 0$ и можно записать тождество: $\dfrac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = 1$.

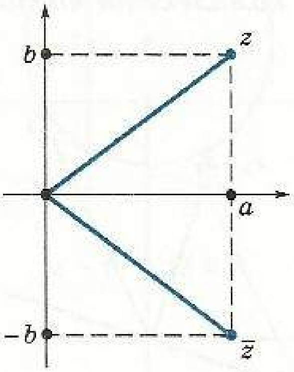
Отсюда ясно, что число $\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{bi}{a^2+b^2}$ является обратным для числа $a + bi$. Умея вычислять обратное число, можно поделить одно комплексное число на другое (отличное от нуля).

4. *Изображение комплексных чисел.*

Число $z = a + bi$ можно изобразить точкой плоскости с координатами (a, b) (например, $M(a, b)$). При таком изображении сложение комплексных чисел соответствует

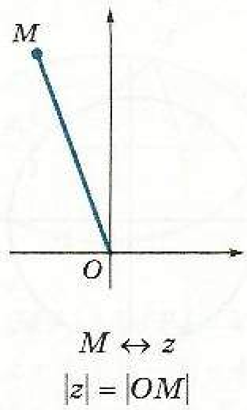


Сопряженные числа



$z = a + bi$

$\overline{z} = a - bi$



$M \leftrightarrow z$

$|z| = |OM|$

Модуль комплексного числа

сложению радиусов-векторов. Геометрическая интерпретация умножения комплексных чисел будет рассмотрена в главе, посвященной вращению и тригонометрическим функциям.

Сопряженные числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ изображаются точками, симметричными относительно оси абсцисс. Число $\sqrt{a^2 + b^2}$, являющееся расстоянием от точки, изображающей число z (говорят просто — от точки z), до начала координат, называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$.

Отметим простые тождества:

1) $|z| = |\overline{z}|$;

2) $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$;

3) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

4) $z = \overline{z} \Leftrightarrow$ действительное число.

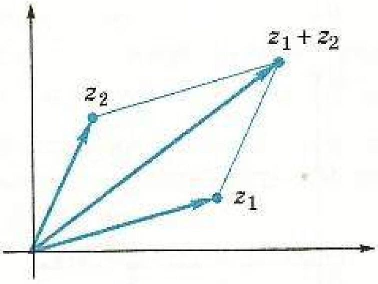
Зачем понадобились комплексные числа?

С использованием комплексных чисел у математиков появились новые возможности. Приведем некоторые из них.

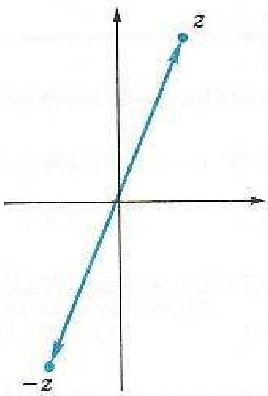
1. Стало возможным находить корни любых алгебраических уравнений. Теорема Гаусса, которую называют основной теоремой алгебры, гласит, что всякое алгебраическое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень.

2. Преобразования плоскости (параллельный перенос, поворот, гомотетия, осевая симметрия и их комбинации) записываются как некоторые простые операции над комплексными числами.

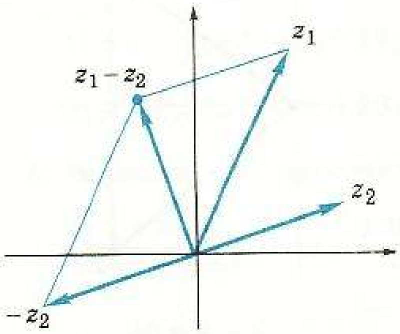
3. Колебательные процессы в механике и физике (распространение звуковых и световых волн, электромагнитные явления, свойства переменного тока) изучаются гораздо проще с использованием комплексных чисел. Любому инженеру представляется весьма осмысленной следующая фраза: «Рассмотрим проводник, по которому течет ток силой $I = I_0(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ А (ампер)», хотя на первый взгляд появление «мнимого» тока не может иметь физического смысла.



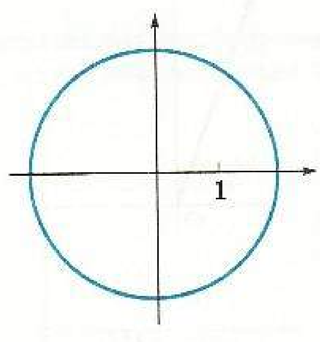
Сложение комплексных чисел



Противоположное комплексное число



Вычитание комплексных чисел



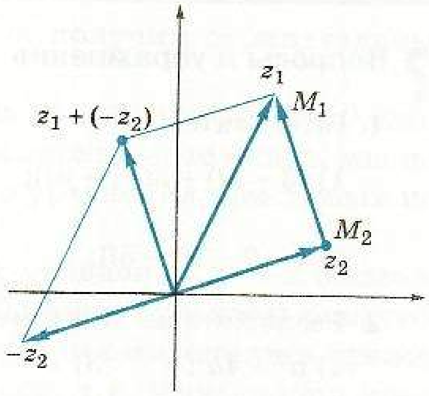
$|z| = 2$

Почему с помощью комплексных чисел удобно задавать геометрические фигуры на плоскости?

В основе этого лежит следующее простое правило.

Теорема. Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа.

На рисунке видно, что векторы, соединяющие точку z_2 с точкой z_1, и начало координат с точкой $z_1 + (-z_2)$, равны между собой. Поэтому число $|z_1 - z_2|$, равное расстоянию от точки $z_1 + (-z_2)$ до начала координат, равно расстоянию между точками z_1 и z_2, что и требовалось доказать.



$|z_1 - z_2| = |M_1M_2|$

Модуль разности двух комплексных чисел

Как производятся вычисления с комплексными числами?

1. *Арифметические действия:*

- $(3 - 4i) + (-5 + 7i) = -2 + 3i$;
- $(3 - 4i)(-5 + 7i) = 3\cdot(-5) - (-4)\cdot 7 + (3\cdot 7 + (-4)(-5))i = 13 + 41i$;
- $\dfrac{-5+7i}{3-4i} = \dfrac{(-5+7i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{-43+i}{25} = -\dfrac{43}{25} + \dfrac{1}{25}i$;
- $(1 + i)^4 = (1 + i)^2\cdot(1 + i)^2 = (1 + 2i - 1)^2 = (2i)^2 = -4$.

2. *Запись уравнений различных кривых с использованием геометрической интерпретации модуля разности двух комплексных чисел:*

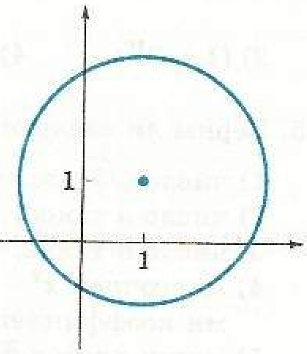
1) окружность радиуса R с центром в начале координат: $|z| = R$;

2) окружность радиуса R с центром в точке z_0:

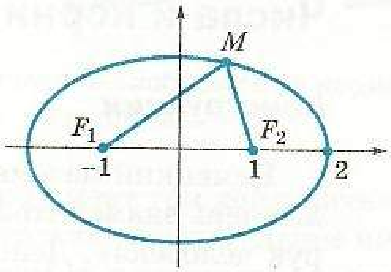
$$|z - z_0| = R;$$

3) эллипс определяется как геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух точек плоскости постоянна:

$$|z - z_1| + |z - z_2| = a.$$



$|z - (1 + i)| = 2$



$|MF_1| + |MF_2| = 4$

$|z + 1| + |z - 1| = 4$

Эллипс с фокусами $F_1(-1; 0)$ и $F_2(1; 0)$

Вопросы и упражнения

1. Вычислите:

1) $(3 + 2i) + 3(-1 + 3i)$; 3) $(2 + i)(-1 + 5i)$; 5) i^3; 7) $\frac{3}{i}$;

2) $i - 2 - (6 - 5i)$; 4) $(1 + i)(1 - i)$; 6) $(1 - i)^4$; 8) $\frac{2}{1-i}$.

2. Разложите на линейные множители:

1) $a^2 + 4b^2$; 3) $x^2 + 1$; 5) $x^4 - 4$; 7) $x^6 - 64$;

2) $a^4 - b^4$; 4) $x^2 - 2x + 2$; 6) $x^3 + 8$; 8) $x^4 + 4$.

3. Изобразите на плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z| = 3$; 3) $|z - 2 + i| \le 3$; 5) $|2z - i| = 4$; 7) $|z - i| = |z - 1|$;

2) $|z + i| = 2$; 4) $|z + 1 + 2i| > 1$; 6) $|iz - 1| \le 1$; 8) $|z - i| + |z + i| = 2$.

4. Вычислите:

1) i^{13}; i^{100}; i^{1993}; 3) $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Найдите a^4, a^{11}, a^{1992};

2) $(1 + i)^{10}$; 4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1993}$.

5. Верны ли следующие высказывания:

1) число $\sqrt{5}$ является комплексным;
2) число a такое, что $a^2 = -4$ является действительным;
3) число a такое, что $a^4 = 1$ является действительным;
4) многочлен $x^2 + 4$ можно разложить на линейные множители с комплексными коэффициентами;
5) точки плоскости, удовлетворяющие условию $|z - 1| = 2$, лежат на окружности радиуса 1;
6) если комплексное число равно своему сопряженному, то оно является действительным;
7) если $\bar{z} = -z$, то действительная часть числа z равна нулю.

БЕСЕДА
Числа и корни уравнений

Конструкции

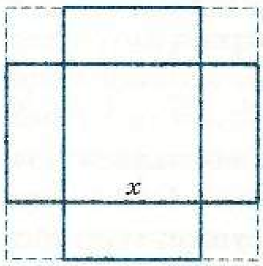
Немецкий математик Л. Кронекер однажды сказал фразу, которая стала очень знаменитой: «Бог создал натуральные числа. Все другие — дело рук человека». Действительно, мы воспринимаем натуральные числа 1, 2, 3, ... как нечто данное. Конструирование новых чисел на основе натуральных можно связывать с различными задачами — например, строить числа, пригодные для записи решений уравнений.

Уравнение вида $x + a = b$, где a и b — натуральные числа, не имеет решений в натуральных числах, если $a > b$. Строя решения этого уравнения при *любых* натуральных числах a и b, получим отрицательные целые числа (и нуль).

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — целые числа, причем $a \neq 0$, также не всегда имеет целые решения. Вводя рациональные числа, мы получаем возможность записать решения этого уравнения при любых целых a и b (с тем же ограничением $a \neq 0$).

Неразрешимость в рациональных числах уравнения $x^2 = 2$ вызвала появление действительных чисел, которые мы сейчас представляем себе в виде бесконечных десятичных дробей. Среди них выделились прежде всего те, которые выражались через радикалы, т.е. через корни уравнений вида $x^n = a$ ($a > 0$). Эти числа мы будем более подробно рассматривать в гл. 2. Разумеется, с помощью квадратных корней удалось исследовать вопрос о решении квадратных уравнений.

Метод Аль-Хорезми
нахождения положительного корня квадратного уравнения



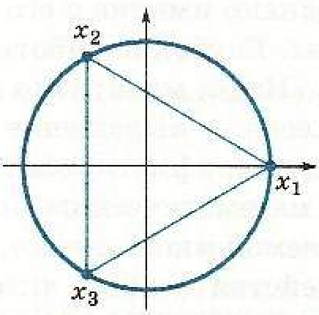
$$x^2 + 10x = 39$$
$$(x + 5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 3$$

Кубическое уравнение было решено с помощью радикалов итальянскими математиками в XVI в.

Решение кубического уравнения

$$x^3 = 1$$
$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

алгебраическая запись комплексных корней квадратного уравнения



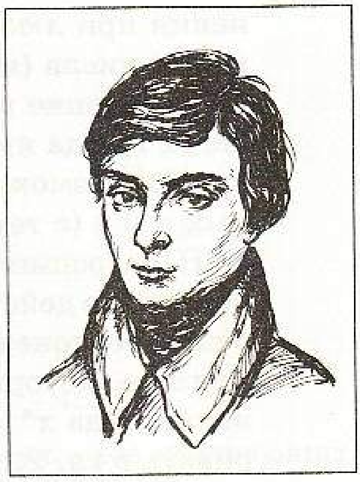
геометрическое изображение корней уравнения $x^3 = 1$

Замечательно, что в случае, когда уравнение имеет три действительных корня, под квадратным радикалом будет стоять отрицательное число и действительный корень запишется как сумма сопряженных комплексных чисел. Так, еще в XVI в. математики пришли к необходимости введения «мнимых» чисел.

Уравнение четвертой степени итальянцы быстро свели к кубическому — метод его решения, предложенный Л. Феррари, был опубликован Д. Кардано в 1545 г. в его знаменитой книге «Ars Magna».

Д. Кардано (1501 — 1576)

Н. Х. Абель (1802 — 1829)



Э. Галуа (1811 — 1832)

Формула Кардано

нахождения корней уравнения $x^3 + px + q = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Для следующего шага потребовалось почти триста лет, когда норвежский математик Н. Хенрик Абель (параллельно с итальянцем П. Руффини) доказал, что не существует общей формулы для решения уравнения пятой степени.

Полное описание уравнений, корни которых можно выразить через их коэффициенты с помощью арифметических действий и извлечения корней, дал примерно в это же время замечательный французский математик Э. Галуа. Он прожил всего 21 год и погиб на дуэли в 1832 г., однако именно с его именем связывается рождение современной алгебры. Глубокие работы Галуа были поняты только к концу XIX в.

Итак, мы кратко проследили одну линию нахождения корней многочлена — выражение корней уравнения через его коэффициенты с помощью арифметически действий. Другая линия связана в большей степени с математическим анализом. Вопрос об обращении в нуль функции, задаваемой многочленом, — это типичный вопрос учения о функциях. То, что действительных чисел недостаточно для описания корней многочлена, стало ясно еще после работ итальянцев в XVI в. Естественный вопрос — достаточно ли комплексных чисел для нахождения корня любого многочлена, не нужно ли добавлять к комплексным числам еще какие-нибудь новые числа — был решен немецким математиком К.Ф.Гауссом и опубликован в конце XVIII в. Он доказал, что любое уравнение (даже с комплексными коэффициентами) имеет комплексный корень.

Аксиомы

Описанный нами конструктивный путь ответа на вопрос: «Что такое число?» не является единственным. Современная математика предлагает вместо ответа на этот вопрос более точно сформулировать, каковы же свойства чисел, какие операции можно с ними выполнять. Разные числовые системы обладают разными свойствами этих операций. Наиболее богатой системой является *поле*. Система чисел образует поле, если обе операции (сложение и умножение) позволяют совершать обратные действия (вычитание и деление).

Любая числовая система, обладающая двумя операциями, для которых выполняются девять аксиом, называется *полем*. Множества $\mathbf{Q}$ — рациональных чисел, $\mathbf{R}$ — действительных чисел являются полями.

Множества натуральных чисел $\mathbf{N}$, целых чисел $\mathbf{Z}$, положительных чисел $\mathbf{R}^+$ не являются полями.

Аксиомы поля не описывают полностью всех нужных нам свойств действительных чисел. Они говорят только об арифметических операциях над ними. Имеется еще обширная группа свойств, связанных с понятиями неравенства и расстояния между числами. К этим свойствам мы вернемся при изучении начал математического анализа (см. гл. 9).

Кроме «стандартных» полей $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ существует много других полей. Особенно важными среди них являются так называемые конечные поля, т.е. системы, состоящие из конечного числа элементов и являющиеся в то же время полями. Если взять одно произвольное простое число p и рассмотреть остатки от деления другого произвольного целого числа на p (их будет ровно p: $0, 1, 2, ..., p-1$), то можно так естественно определить сложение и умножение остатков, что они будут образовывать поле. Для этого надо совершать над остатками обычные операции как над целыми числами, а получившееся число заменять остатком от деления на p (говорят: вычислять по модулю p).

Например, над остатками от деления на 5 можно совершать все операции: $3 + 4 = 2$; $3 - 4 = 4$; $3 \cdot 2 = 1$, т.е. $-3 = 2$, а $-2 = 3$ и т.д.

Аксиомы

1. *Сложение и умножение — коммутативно и ассоциативно, т.е. выполняются тождества*:

1) $a + b = b + a$;
2) $ab = ba$;
3) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
4) $(ab)c = a(bc)$.

2. *Сложение и умножение обладают нейтральными элементами* (*нуль для сложения и единица для умножения*):

5) $a + 0 = a$;
6) $1 \cdot a = a$.

3. *Выполнимы обратные операции*:

7) для каждого числа a существует противоположное число $(-a)$, т.е. $a + (-a) = 0$;
8) для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, т.е. $a \cdot a^{-1} = 1$.

4. *Дистрибутивный закон*:

9) $a(b + c) = ab + ac$.

ГЛАВА 2 Корни, степени и логарифмы

Занятие 1
Повторение пройденного

$$a^1 = a$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

$$a \neq 0$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^0 = 1$$

n	2^n
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

Что мы знаем о степенях?

1. *Степень числа с натуральным показателем.* Пусть $n > 1$ — натуральное число; a — произвольное число.

Тогда a^n — произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^2 = a \cdot a \text{ — квадрат числа } a;$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \text{ — куб числа } a.$$

Натуральные числа определяются *последовательно*, начиная с единицы (N = 1, 2, 3...). Если нам известно некоторое число n, то следующим числом будет $n + 1$. Точно так же последовательно можно определить степени с натуральным показателем:

считаем, что $a^1 = a$;

знаем a^n, полагаем $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

2. *Обобщение понятия степени на произвольные целые показатели.*

Для любого числа $a \neq 0$ определяем $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где n — натуральное число.

Добавим определение степени с *нулевым* показателем:

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1,\ a \neq 0.$$

3. *Свойства степеней с целыми показателями*:

- умножение: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- деление: $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- возведение в степень: $(a^m)^n = a^{mn}$.

4. *Геометрическая прогрессия*. Геометрическая прогрессия — это последовательность, задаваемая первым членом a_1 и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n \cdot q$, позволяющим вычислить любой ее член, зная предыдущий. Постоянное число q называется *знаменателем* прогрессии.

Формула общего члена: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Сумма n членов: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $(q \neq 1)$.

5. *Степенные зависимости и функции*. Выбрав любое целое число m, можно построить *степенную функцию* $y = kx^m$, определенную при всех x, если m — натуральное число, и при всех x, кроме нуля, если $m \leq 0$.

Нам известны графики и свойства степенных функций при малых показателях m:

1) $m = 1$ $\quad y = kx$

y прямо пропорционально зависит от x;

2) $m = -1$ $\quad y = \dfrac{k}{x}$

y обратно пропорционально зависит от x;

3) $m = 2$ $\quad y = kx^2$

y квадратично зависит от x (пропорционален квадрату x);

4) $m = 3$ $\quad y = kx^3$

y пропорционален кубу x.

Как решаются следующие задачи?

1. *Упростить* выражение, содержащее степени с целыми показателями:

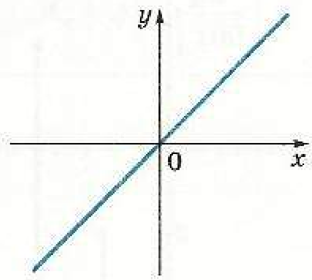
$$(a^3)^{-2} \cdot (a^{-4})^{-1} = a^{-6+4} = a^{-2}.$$

При возведении в степень показатели перемножаются, при умножении степеней — складываются.

2. *Расположить* степени в порядке возрастания:

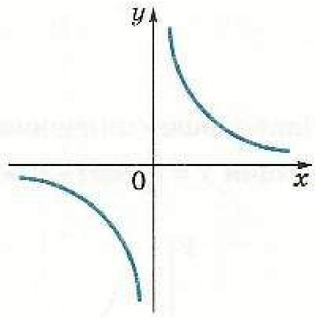
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}, 4^2, \left(\frac{1}{4}\right)^{0}, 2^{-2}, 8^{-1}.$$

Прямая пропорциональная зависимость



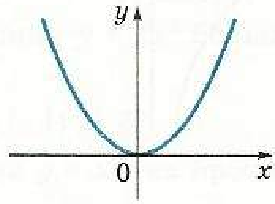
$y = x$

Обратная пропорциональная зависимость



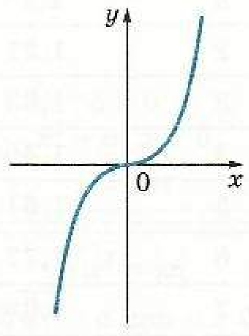
$y = x^{-1}$

Квадратичная функция



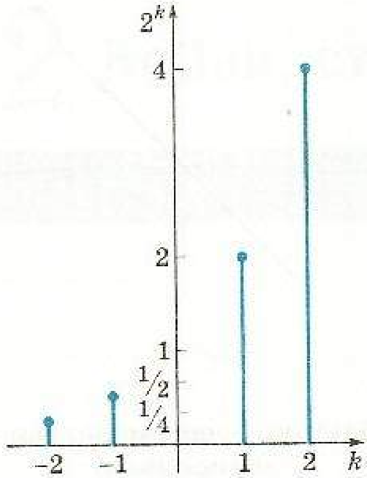
$y = x^2$

Кубическая функция

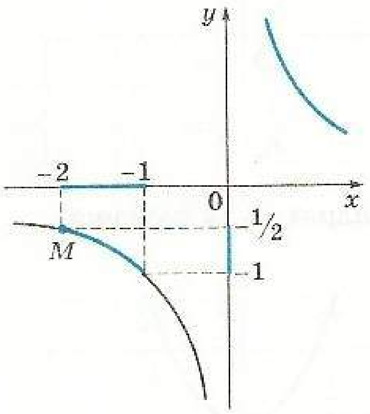


$y = x^3$

График функции $y = 2k$



Наибольшее значение функции $y = \frac{1}{x}$ на $[-2; -1]$



Сумма вклада

n	$1{,}1^n$
2	1,21
3	1,33
4	1,46
5	1,61
6	1,77
7	1,95
8	2,14

Приводим все степени к одному основанию:

$$2^6,\ 2^4,\ 2^0,\ 2^{-2},\ 2^{-3}.$$

Так как число $2 > 1$ и $2^k > 0$ при любом целом k, то $2 \cdot 2^k > 2^k \Rightarrow 2^{k+1} > 2^k$ при любом целом k. Следовательно, располагаем показатели степени в порядке возрастания:

$$-3 < -2 < 0 < 4 < 6,$$

и степени в соответствии с показателями:

$$2^{-3} < 2^{-2} < 2^0 < 2^4 < 2^6,$$

$$\text{т.е. } 8^{-1} < 2^{-2} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 < 4^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}.$$

3. *Определить параметры прогрессии.* В геометрической прогрессии $a_2 = 3$, $a_5 = 81$. Найти сумму ее первых десяти членов.

Вычислим знаменатель прогрессии: $a_5 = a_4 \cdot q = a_3 \cdot q^2 = a_2 \cdot q^3$; $81 = 3q^3$, $q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$.

Определим первый член из формулы $a_2 = a_1 \cdot q$, $3 = a_1 \cdot 3$, $a_1 = 1$.

Сумма $S_{10} = 1 \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{59\,049 - 1}{2} = 29\,524.$

4. *Найти по графику* наибольшее значение M функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $[-2; -1]$.

На графике видно, что на указанном промежутке функция y убывает. Поэтому наибольшее значение M она принимает на левом конце промежутка: $M = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

5. *Определить сумму вклада.* Банк начисляет по вкладу ежегодно x %. В конце года процент добавляется к вкладу. Каков будет вклад через n лет?

Обозначим исходный вклад через A. В конце года он станет равным $A + A \cdot \frac{x}{100} = A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$. Таким образом, вклад через год получается умножением на число $q = 1 + \frac{x}{100}$. Геометрическая прогрессия A, Aq, Aq^2, ... дает последовательность вкладов на каждый год.

Формула для вклада A_n через n лет $A_n = A\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$ называется *формулой сложных процентов*.

Формула сложных процентов

$$A_n = A\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$$

Вопросы и упражнения

1. Вычислите:

1) 2^{10}; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 5) $4^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^{-3}$;

2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$; 4) 5^0; 6) $(5^3)^{-2}\cdot(0{,}1)^{-6}-(4^{-3})^{-1}$.

2. Упростите:

1) $\left(\frac{a^{-1}}{b^2}\right)^5 : \left(\frac{b^3}{a^4}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a^{-3}}{b^{-2}}\right)^2$.

3. Какое из чисел больше:

1) 243^4 или 3^{20}; 3) 501^3-399^3 или $(501-399)^3$;

2) 66^{15} или 1021^{12}; 4) 9^{-2} или $\left(\frac{1}{27}\right)^2$?

4. Найдите x из уравнения:

1) $2^x=\frac{1}{16}$; 2) $10^{2x-3}=1$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=81$; 4) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-x}=\frac{8}{27}$.

5. Первый член геометрической прогрессии (a_n) равен 1, а знаменатель $q = 1{,}1$. При каком наименьшем n член a_n станет больше двух?

6. Определите по графику, для каких x значения функции $y = 2x^2$ больше или равны значениям функции $y = x^3$.

7. Каково множество значений функций $y = x^k$ при $k = -1;\ 1;\ 2;\ 3$?

8. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^{-2}$ на промежутке $[-3; -2]$.

Занятие 2
Корень n-й степени

Что такое корень n-й степени и каковы его свойства?

$$a \ge 0$$
$$x^2 = a,\ x \ge 0$$
$$x = \sqrt{a}$$

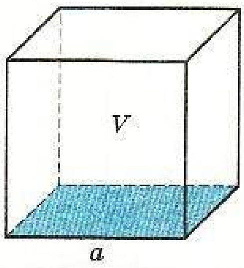
1. *Определение*. Пусть $n > 1$ — натуральное число; a — произвольное число.

Корнем n-й степени из числа a называется число b такое, что $b^n = a$.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ при } a \ge 0$$
$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a} \text{ при } a \ge 0$$

n	$\sqrt{n}$
2	1,41
3	1,73
4	2
5	2,24
6	2,45
7	2,65
8	2,83
9	3
10	3,16

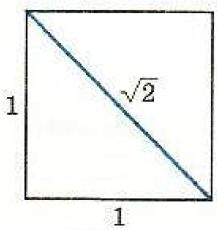
Ребро куба



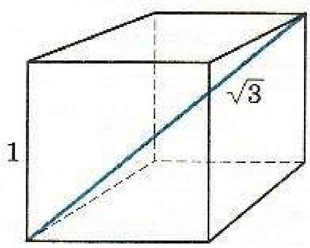
$$V = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{V}$$

Диагональ квадрата



Диагональ куба



Например, число 3 является корнем 4-й степени из числа 81, так как $3^4 = 81$. Число -3 также является корнем 4-й степени из числа 81, так как $(-3)^4$ тоже равно 81.

На языке уравнений можно сказать, что

> *Корень n-й степени из числа a* — это корень уравнения
> $$x^n = a.$$

2. *Существование.* При $a > 0$ для любого натурального $n > 1$ существует *единственный положительный* корень n-й степени из числа a. Он обозначается с помощью знака радикала: при $a > 0$ $\sqrt[n]{a}$ — это такое число b, что $b > 0$ и $b^n = a$.

Обозначение $\sqrt[n]{a}$ распространяется на $a = 0$: $\sqrt[n]{0} = 0$ и на $a < 0$ (*при нечетных n*): если $n = 2k + 1$, то

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Например, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

3. *Количество корней.* Уравнение $x^n = a$ ($n > 1$, натуральное число) имеет следующее количество корней:

1) n — четно:
- нет корней при $a < 0$;
- один корень $x = 0$ при $a = 0$;
- два корня
$x = \sqrt[n]{a}$ и $x = -\sqrt[n]{a}$ при $a > 0$;

2) n — нечетно: один корень $\sqrt[n]{a}$ при любом a.

4. *Свойства радикалов*:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $a, b \geq 0$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $a \geq 0$, $b > 0$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $a \geq 0$;

4) $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Зачем вводятся корни n-й степени?

Нахождение корня n-й степени или, как традиционно говорят, *извлечение* корня n-й степени — это операция, *обратная* возведению в степень положительного числа:

$$a^n = b \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b} \text{ (при } a \geq 0,\ b \geq 0).$$

Например, объем V куба с ребром a равен кубу числа a: $V = a^3$. Обратно, ребро a куба объемом V является кубическим корнем из числа V: $a = \sqrt[3]{V}$.

Почему выполняются сформулированные свойства корней?

1. *Вопрос существования* корней — это фактически вопрос построения новых чисел. Как отмечалось ранее, диагональ квадрата со стороной 1 является квадратным корнем из числа 2. Зная лишь рациональные числа и не сомневаясь в существовании диагонали квадрата, древнегреческие математики были вынуждены открыть число $\sqrt{2}$, т.е. ввести в рассмотрение квадратные корни не только в тех случаях, когда такие корни могли выражаться через известные до этого рациональные числа.

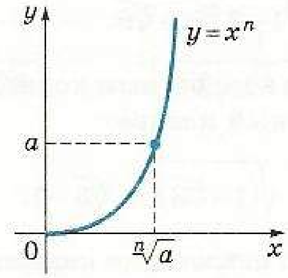
Построив множество всех действительных чисел — например, с помощью бесконечных десятичных дробей — математики нашли существование $\sqrt[n]{a}$ при любом n и $a > 0$.

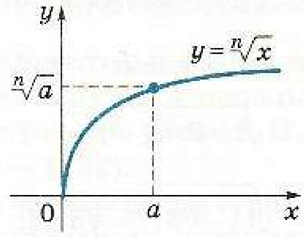
Когда понадобились, например, квадратные корни из отрицательных чисел (которых не может быть среди действительных чисел), итальянским математикам XVI в. пришлось ввести новые числа, которые стали называть *мнимыми* числами.

2. *Вопрос количества* корней решается сравнительно легко. То, что не может быть более одного положительного корня из положительного числа, доказывается с помощью свойств неравенств. Пусть b_1 и b_2 являются различными положительными корнями n-й степени из числа a. Если числа различны, то одно из них больше другого, например, $b_1 > b_2$. Перемножая неравенства с положительными членами, получим $b_1^n > b_2^n$, т.е. $a > a$, что неверно.

3. *Свойства радикалов* проверяются с помощью свойств степеней. Например, как доказать, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ для $a, b > 0$? По определению $\sqrt[n]{ab}$ — это такое положительное

Извлечение корня n-й степени — операция, обратная возведению в n-ю степень положительного числа





Любопытно: число

$$\sqrt{a} + \sqrt{b},$$

где a и b — целые числа, не являющиеся квадратами, не может быть целым числом, но может быть к нему очень близко.

Упражнение: в десятичной записи числа $\sqrt{98\,765\,432} + \sqrt{80\,998\,562}$ пять знаков после запятой таковы: ..., 00001.

Вычислите с помощью калькулятора целую часть этого числа.

Примеры

Упростить следующие выражения, содержащие радикалы:

- $\sqrt[3]{5 \cdot 8} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{5}$ — по первому свойству радикалов;
- $\sqrt[3]{\dfrac{5}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{5}$ — по второму свойству радикалов.

Примеры

Упростить следующие выражения, содержащие радикалы:

• $\sqrt{1-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

Под квадратным корнем стоит полный квадрат

$$\sqrt{\left(1-\sqrt[3]{3}\right)^2}=\sqrt[3]{3}-1.$$

При извлечении квадратного корня из a^2 мы учли знак a:

$$1-\sqrt[3]{3}<0\Rightarrow\sqrt[3]{3}-1>0.$$

Таким образом:

$$\sqrt{1-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=$$

$$=\sqrt{\left(1-\sqrt[3]{3}\right)^2}=\sqrt[3]{3}-1;$$

• $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Домножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы чисел $\sqrt[3]{2}$ и 1 ($\sqrt[3]{2}+1$) и получим

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1}=$$

$$=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$$

число, n-я степень которого равна ab. При этом нам известно, что такое число является единственным. Проверим, что число $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ удовлетворяет этим условиям. Оно положительно (как произведение двух положительных чисел) и его n-я степень равна ab: $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=a\cdot b.$

Как решаются задачи с использованием корней?

• *Дано*: последовательность частот звуков образует геометрическую прогрессию; $a_1=a$; $a_{10}=2a$.

Найти: q.

Решение: так как $a_{10}=a_1\cdot q^9$, то q удовлетворяет уравнению $2a=a\cdot q^9$, т. е. $q^9=2$ и $q=\sqrt[9]{2}$.

• ***Упростить выражение***:

$$\frac{\sqrt[4]{36}\cdot\sqrt[3]{500}}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{3}}.$$

Разложим числа, стоящие под знаком радикала, по степеням простых чисел и воспользуемся свойствами радикалов $\dfrac{\sqrt[4]{2^2\cdot3^2}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot5^3}}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{3}}=$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot5}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2}}\cdot5=\frac{\sqrt[6]{2^7}}{\sqrt[6]{2}}\cdot5=$$

$=2\cdot5=10.$

? Вопросы и упражнения

1. Какие из следующих чисел являются рациональными:

1) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$; 2) $\sqrt[3]{64}$; 3) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{100}}{\sqrt{1000}+\sqrt{10000}}$; 4) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$?

2. Всегда ли верны равенства

1) $\sqrt{a^6}=a^3$; 2) $\sqrt{a^8}=a^4$?

3. Вычислите:

1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}-\sqrt[3]{216}$; 3) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{125}}{125}}$; 4) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

4. Какие из чисел больше:

1) $\sqrt{0{,}999}$ или $0{,}999$; 3) $\sqrt[3]{10\,000}$ или 21;

2) $\sqrt{2007}+\sqrt{2009}$ или $2\sqrt{2008}$; 4) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ или $2\sqrt{2}-3$?

5. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+2\right)\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Занятие 3
Степени

Что понимается под степенью с произвольным показателем?

1. *Степени a^x при различных заданиях числа x.* Пусть дано положительное число a. Как возвести его в степень x? Ответ зависит от того, как задано число x:

1) x — *целое число*. Как определяется степень с произвольным целым показателем, мы повторили ранее;

2) x — *рациональное число*, записанное в виде $x=\dfrac{k}{n}$, где k — целое число; n — натуральное.

По определению $a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$. Число a^k нам известно (см. занятие 1). Оно положительно и для него однозначно определен положительный корень n-й степени;

3) x — *произвольное действительное число*, заданное последовательностью рациональных приближений $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Числа x_i рациональны. Их можно записать в виде обыкновенных дробей $x_i=\dfrac{k_i}{n_i}$. Тогда становятся однозначно определенными числа $y_i=a^{x_i}=a^{\frac{k_i}{n_i}}$. Последовательность $y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots$ является последовательностью приближений к некоторому числу y, которое и принимается за степень a^x.

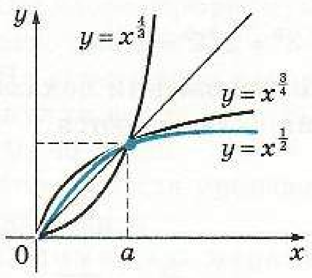
2. *Свойства степеней.* На степени с любыми показателями переносятся свойства степеней с целыми показателями:

Историческая справка

Положительные дробные показатели первым использовал французский ученый Н. Орем (1323—1382).

Нулевой и целые отрицательные показатели появились более чем через 100 лет и также во Франции (Н. Шюке).

Графики степенных функций с положительными дробными показателями



Пример

Для вычисления степени 2^{π} представим число π в виде бесконечной десятичной дроби

$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$

Запишем последовательность десятичных приближений к числу π в виде

$$x_0=3,\ x_1=\frac{31}{10},\ x_2=\frac{314}{100},$$

$$x_3=\frac{3141}{1000}\ \text{и т. д.}$$

Затем рассмотрим числа

$$2^{x_0} = 8,$$

$$2^{x_1} = \sqrt[10]{2^{31}} = 8{,}574,$$

$$2^{x_2} = \sqrt[100]{2^{314}} = 8{,}815 \text{ и т. д.}$$

Данная последовательность определяет некоторое число y, которое и является степенью числа 2^π.

Первые десятичные знаки числа 2^π таковы: $2^\pi = 8{,}825...$.

Свойства степеней

- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Примеры

- $(a^2b)^3 = a^6b^3$
- $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4 = \frac{a^8}{b^{12}}$

— при возведении в степень показатели степени перемножаются;

- $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$

— при умножении показатели степени складываются.

$$\boxed{a^r = a^{\frac{k_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{a^{k_1}}}$$

Действительно, если $r = \frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2}$, то $k_1n_2 = k_2n_1$.

С одной стороны, $a^r = a^{\frac{k_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{a^{k_1}}$, а с другой — $a^r = a^{\frac{k_2}{n_2}} = \sqrt[n_2]{a^{k_2}}$.

Однако $\sqrt[n_1]{a^{k_1}} = \sqrt[n_1n_2]{a^{k_1n_2}} = \sqrt[n_1n_2]{a^{k_2n_1}} = \sqrt[n_2]{a^{k_2}}$.

- умножение: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- деление: $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- возведение в степень: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Зачем вводятся степени с произвольным показателем?

1. С помощью степеней с рациональным показателем можно свободнее выполнять преобразования.

2. Есть много величин, зависящих от времени t, значения которых при $t = 0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q > 0$: $a_0, a_0q, a_0q^2, ...$ В формуле $a_n = a_0q^n$ число n является натуральным числом. Однако часто оказывается так, что данная величина $a = a(t)$ меняется непрерывно со временем и ее зависимость от времени выражается аналогичной формулой $a(t) = a_0q^t$, где время t принимает не только натуральные, но любые действительные значения.

Почему данные нами определения степени имеют смысл и как доказать свойства степеней?

1. *Определение* степени с рациональным показателем внешне зависит от записи числа в виде дроби $r = \frac{k}{n}$. Эта запись неоднозначна (например, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$), однако значение a^r от этой записи не зависит.

2. *Осмысленность* (или, как говорят математики, *корректность*) определения степени с произвольным вещественным показателем проверить непросто. Обратим внимание лишь на два вопроса, нуждающиеся в проверке:

1) если $x_0, x_1, x_2, ...$ — последовательность рациональных приближений к некоторому числу, то будет ли последовательность $a^{x_0}, a^{x_1}, a^{x_2}, ...$ вообще приближаться к какому-либо числу? Для этого достаточно проверить, что эти числа сближаются между собой, т.е. что разность $a^{x_{n+1}} - a^{x_n}$ будет сколь угодно малой;

2) если изменить последовательность рациональных приближений к одному и тому же числу, то будут ли соответствующие последовательности степеней приближаться к одному и тому же числу?

3. *Свойства степеней* с рациональными показателями доказываются на основе свойств радикалов, а затем переносятся на произвольные показатели.

Как используются степени с произвольным показателем при решении задач?

1. *Вычисление степеней через корни*:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2{,}25}$;

2) $a^{\frac{7}{6}} = a^{1+\frac{1}{6}} = a\sqrt[6]{a}$.

2. *Приведение к одному основанию*:

запишем числа $9^{\frac{1}{3}}$, 27^{-1}, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{81}$ в виде степеней числа 3 с рациональным показателем:

$$9^{\frac{1}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}},\ 27^{-1} = (3^3)^{-1} = 3^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(3^{-1}\right)^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}},\ \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}.$$

3. *Преобразование выражений*:

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

4. *Решение простейших уравнений*:

1) $x^{\frac{3}{4}} = 2 \Rightarrow x = 2^{\frac{4}{3}}$;

2) $(x-1)^{-\frac{2}{3}} = 3 \Rightarrow x - 1 = 3^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 1 + 3^{-\frac{3}{2}}$.

Неравенство Бернулли

При сравнении степеней часто приходится пользоваться различными неравенствами. Докажем полезное неравенство (частный случай знаменитого неравенства Бернулли): пусть $x > 0$, $n > 1$, тогда

$$(1 + x)^n > 1 + nx;$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{x}{n}.$$

Доказательство. Заметим, что второе неравенство вытекает из первого. Подставим в первое неравенство вместо x число $\frac{x}{n}$ и извлечем корень n-й степени.

Для доказательства первого неравенства применяем индукционное рассуждение:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \cdot (1 + x) >$$
$$> (1 + nx) \cdot (1 + x);$$
$$1 + (n + 1)x + nx^2 >$$
$$> 1 + (n + 1)x.$$

Осталось проверить неравенство при $n = 2$.

На самом деле неравенство Бернулли верно не только для $x > 0$, но и для $-1 < x < 0$. Оно обобщается для произвольного показателя r.

С помощью неравенства Бернулли можно сделать проверку того, что a^r близко к a^s, если показатели r и s близки между собой.

Пусть $s > r$ и $a > 1$.

$$a^s - a^r = a^r\,(a^{s-r} - 1) \text{ и } s - r < \frac{1}{n}.$$

Тогда $a^{s-r} < a^{\frac{1}{n}}$. Запишем a в виде $a = 1 + x$, где $x > 0$. Получим $a^{s-r} - 1 < (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{x}{n}$.

Окончательно: $a^s - a^r < a^r \frac{x}{n}$.

Ясно, что за счет выбора большого n разность $a^s - a^r$ может быть сколь угодно малой.

Вопросы и упражнения

1. Запишите в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\sqrt[4]{27}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\sqrt[3]{25}$; 6) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}$.

2. Запишите с помощью радикалов:

1) $3^{\frac{1}{2}}$; 3) $5^{\frac{2}{3}}$; 5) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{10}{3}}$; 7) $2^{-0,25}$; 9) $2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}$;

2) $2^{-\frac{3}{2}}$; 4) $3^{-\frac{6}{5}}$; 6) $5^{0,5}$; 8) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$; 10) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}$.

3. Выполните действия:

1) $2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}$; 3) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}}}$; 5) $\left(\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$;

2) $\left(\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{5}{6}}}\right)^3$; 4) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}a^{-\frac{1}{8}}}$; 6) $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$.

4. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $2^{-\frac{3}{4}}$; 2; $\dfrac{1}{2}$; $2^{\frac{2}{3}}$; $2^{-\frac{4}{3}}$;

2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $9^{-\frac{1}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

3) 2^4; $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4$; $(-3)^4$; $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-4}$; $\left(\dfrac{9}{25}\right)^2$;

4) 3^3; $(-2)^3$; $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; 2^6.

5. Докажите неравенство:

1) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} < \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 3) $2003^{\frac{1}{2}} + 2005^{\frac{1}{2}} < 2\cdot 2004^{\frac{1}{2}}$;

2) $3^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{4}} > 5^{\frac{1}{5}}$; 4) $2^{\frac{1}{100}} + 101^{-1} > 1$.

6. Решите уравнения, построив графики степенных функций (или их комбинаций), стоящих в его левой и правой частях:

1) $x^3 = 2 - x$; 3) $3x^3 = |x-4|$; 5) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{4}\left(x+\dfrac{5}{3}\right)^2$;

2) $2x^3 = \dfrac{1}{2}x + 15$; 4) $x^4 = 5x + 6$; 6) $\dfrac{4}{x^2} = x - 1$.

Занятие 4
Логарифмы

Что такое логарифм?

1. *Определение.*

Логарифмом числа c по основанию a называется такое число b, что $a^b = c$, т.е. показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить c: $b = \log_a c$.

Основание и число, стоящее под знаком логарифма, должны быть положительными. Кроме того, предполагается, что $a \neq 1$.

Если основание $a = 10$, то такой логарифм числа c называется *десятичным* и обозначается $\lg c$, т.е. $\lg c = \log_{10} c$.

2. *Свойства логарифмов.* Свойства степеней и логарифмов связаны между собой:

Свойства степеней	Свойства логарифмов
$a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$	$\log_a(c_1c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$
$\dfrac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1-b_2}$	$\log_a \dfrac{c_1}{c_2} = \log_a c_1 - \log_a c_2$
$(a^b)^k = a^{bk}$	$\log_a c^k = k\log_a c$
$\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$	$\log_a \sqrt[n]{c} = \dfrac{1}{n}\log_a c$

3. *Основное логарифмическое тождество.* Равенства $a^b = c$ и $b = \log_a c$ выражают одну и ту же связь между числами a, b и c.

Подставляя в равенство $a^b = c$ представление числа b в виде логарифма, получаем *основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a c} = c.$$

Подставляя в равенство $b = \log_a c$ представление c в виде степени, получаем еще одно тождество:

$$\log_a a^b = b.$$

4. *Переход к новому основанию.* Логарифмы чисел по разным основаниям пропорциональны друг другу:

$$\log_a x = k\log_b x.$$

Историческая справка

Первые таблицы логарифмов были фактически построены немецким математиком М. Штифелем (1487—1567).

Шотландский математик Дж. Непер в работе «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614) изложил свойства логарифмов, правила пользования таблицей и привел примеры вычислений.

С тех пор долгое время логарифмы называли «неперовыми».

Дж. Непер
(1550—1617)

Независимо от Дж. Непера швейцарский математик, астроном и часовой мастер И. Бюрги (1552—1632), работавший с великим И. Кеплером, опубликовал в 1620 г. аналогичные, хотя и менее совершенные, логарифмические таблицы.

Основное логарифмическое тождество

$\boxed{a^{\log_a c} = c}$

Приложения логарифмов

1. *Полет ракеты переменной массы.*

Формула Циолковского связывает скорость ракеты v с ее массой m:

$$v = kv_1 \lg\frac{m_0}{m},$$

где v_1 — скорость вылетающих газов; m_0 — стартовая масса ракеты; k — коэффициент.

Скорость истечения газов v_1 при сгорании топлива невелика (в настоящее время она меньше или равна 2 км/с).

Логарифм растет очень медленно, и для того чтобы достичь космической скорости, необходимо сделать большим отношение $\frac{m_0}{m}$, т.е. почти всю стартовую массу отдать под топливо.

2. *Звукоизоляция стен.*

Коэффициент звукоизоляции стен измеряется по следующей формуле:

$$D = A\lg\frac{p_0}{p},$$

где p_0 — давление звука до поглощения; p — давление звука, прошедшего через стену; A — некоторая константа, которая в расчетах принимается равной 20 дБ.

Если коэффициент звукоизоляции $D \approx 20$ дБ, то $\lg\frac{p_0}{p} = 1$ и $p_0 = 10p$, т.е. стена снижает давление звука в 10 раз (такую звукоизоляцию имеет деревянная дверь).

Применение свойств логарифмов

1. *Вычисление логарифмов.*

- $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8;$
- $\lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3;$
- $\lg\sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}\lg 10 = \frac{1}{3}.$

Коэффициент пропорциональности k вычисляется следующим образом:

$$k = \frac{1}{\log_b a} \text{ или } k = \log_a b.$$

Его называют *модулем перехода* от одного основания логарифма к другому.

В частности,

$$\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x},$$

так как $\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x / \log_{\frac{1}{a}} a = -\log_{\frac{1}{a}} x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}.$

Зачем нужны логарифмы?

Однажды на такой вопрос ответил П. Лаплас, который сказал, что изобретение логарифмов удлинило жизнь астрономов. Действительно, первое назначение логарифмов состояло в упрощении сложных вычислений, при котором умножение с помощью логарифмов заменялось сложением. Еще недавно каждый инженер носил в кармане логарифмическую линейку, с помощью которой можно было выполнять разные подсчеты, выполняемые сейчас на калькуляторе.

С помощью логарифмов можно решать задачи, обратные возведению в степень: если $a^x = b$, то неизвестное x можно записать как $\log_a b$. При этом важна не сама возможность записи, а то, что, меняя b, т.е. рассматривая $x = \log_a b$ как функцию от b, мы обнаруживаем новый характер функциональной зависимости.

Логарифмические функции значительно пополнили запас зависимостей, доступных сравнительно простому изучению.

Почему логарифмы обладают такими удобными свойствами?

1. *Доказательство правил логарифмирования.* Все правила логарифмирования доказываются с применением свойств степени.

Докажем, например, правило логарифмирования произведения: логарифм произведения равен сумме логарифмов.

Обозначим $\log_a c_1 = b_1$, $\log_a c_2 = b_2$. По основному логарифмическому тождеству имеем $a^{b_1} = c_1$, $a^{b_2} = c_2$.

Перемножим эти равенства:

$$a^{b_1}a^{b_2} = c_1c_2.$$

По свойству степеней $a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$, т. е. $c_1c_2 = a^{b_1+b_2}$. По определению логарифма $b_1 + b_2 = \log_a(c_1c_2)$, тогда

$$\log_a(c_1c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2,$$

что и требовалось доказать.

2. *Доказательство формулы для модуля перехода.* Прологарифмируем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$ по основанию b:

$$\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x,$$

откуда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Эту формулу часто читают следующим образом: логарифм числа по новому основанию равен логарифму числа по старому основанию, деленному на логарифм нового основания по старому основанию.

Коэффициент пропорциональности можно записать в виде

$$k = \log_a b,$$

так как $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ (положите в формуле $x = b$).

2. *Логарифмирование.*

Дано: $A = \left(100a^{\frac{2}{3}}b\right)^3$. *Найти*: $\lg A$.

Решение. $\lg A = 3\cdot\left(\lg 100 + \frac{2}{3}\lg a + \lg b\right) = 6 + 2\lg a + 3\lg b.$

3. *Потенцирование* (нахождение выражения по его логарифму).

$$\log_2 A = -1 + 2\log_2 a - 3\log_2 b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 A = \log_2\frac{1}{2} + \log_2 a^2 - \log_2 b^3 = \log_2\frac{a^2}{2b^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}\cdot a^2\right) : b^3 = \frac{a^2}{2b^3}.$$

4. *Переход к одному основанию.*

Дано: $A = \log_{\frac{1}{4}} a - \log_{\sqrt{2}} a + 2\log_8 a.$

Перейти к основанию 2.

Решение. Заметим, что $\log_2 2^k = k$ — это поможет устно находить модуль перехода.

$$A = \frac{\log_2 a}{\log_2\frac{1}{4}} - \frac{\log_2 a}{\log_2\sqrt{2}} + 2\ \frac{\log_2 a}{\log_2 8} =$$

$$= \log_2 a\left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{1/2} + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \log_2 a\left(-\frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{6}\log_2 a.$$

Вопросы и упражнения

1. Вычислите:

1) $\log_a a$, $\log_a 1$, $\log_a a^5$, $\log_a \frac{1}{a}$, $\log_a \sqrt{a}$, $\log_a \sqrt[5]{a^3}$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 1$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\log_3 27$, $\log_3\frac{1}{9}$, $\log_9\frac{1}{27}$, $\log_2\sqrt{2}$, $\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\log_{\sqrt{2}} 4$, $\log_{\sqrt{5}}\sqrt[4]{125}$.

2. Прологарифмируйте данное выражение по основанию a:

1) $A = x^4$;
2) $A = 2a^2x^3y^4$;
3) $A = \frac{\sqrt[3]{a^2}b\sqrt{c}}{3\sqrt{3}d}$;
4) $A = \frac{3\sqrt{a}}{ab}$;
5) $A = \frac{a^2}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}c^{-\frac{1}{2}}}$;
6) $A = a^3(a-2)(a-5)$.

3. Найдите выражение A по логарифму:

1) $\log_a A = 3 + 2\log_a b$;

2) $\ln A = \ln\sin x - \ln\cos x$ ($\ln$ — логарифм с основанием e ($e \approx 2{,}71828$), называемый натуральным логарифмом);

3) $\lg A = -1 + \dfrac{1}{2}\lg(x-1) - 3\lg x$.

4. Определите, какое из чисел больше:

1) $\log_3 2$ или 0;

2) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ или 0;

3) $\log_5 \dfrac{1}{3}$ или 0;

4) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{2}$ или 0;

5) $\log_3 4$ или 1;

6) $\log_{\frac{1}{7}} \dfrac{1}{8}$ или 1;

7) $\log_2 3$ или $\log_2 5$;

8) $\log_2 7$ или $\log_2 \dfrac{1}{9}$;

9) $\log_{\frac{1}{3}} 7$ или $\log_{\frac{1}{3}} 10$;

10) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{5}$ или $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{7}$.

5. Замените логарифмы $\log_{\frac{1}{2}} a$, $\log_8 a$, $\log_{\frac{1}{4}} a$, $\log_{\sqrt{2}} a$, $\log_3 a$ логарифмами по основанию 2.

6. Найдите:

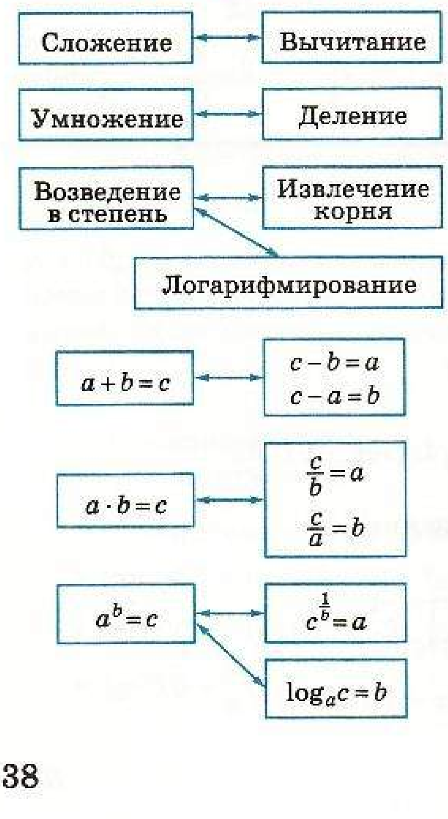
1) $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$;

2) $\log_9 15$, если $\log_{\sqrt[3]{45}} 25 = a$;

3) $\log_{250} 120$, $\log_9 20 = a$, $\lg 2 = b$.

Занятие 5
Показательные и логарифмические функции

Семь арифметических операций



Что нового дают степени и логарифмы для изучения функций?

1. *Одна зависимость — три функции.* Рассмотрим три переменные x, y и z, связанные зависимостью $z^x = y$.

Зафиксируем значение переменной $z = a$, потребовав, чтобы выполнялись условия $a > 0$, $a \neq 1$. Можно записать связь между двумя остальными переменными в виде $y = a^x$. Меняя произвольно x, получим *показательную функцию*, или *экспоненту*.

Выразим из этого же соотношения $y = a^x$ переменную x как функцию от y: $x = \log_a y$. Меняя y в качестве аргумента, получим *логарифмическую функцию*.

Если в том же соотношении $z^x = y$ зафиксировать показатель $x = k$, то получим уже знакомую степенную функцию $y = z^k$. Еще одну степенную функцию получим, выражая z через y: $z = y^{\frac{1}{k}}$.

Разумеется, во всех этих переходах надо следить за ограничениями, которые накладываются на переменные. Мы уже это сделали для показательной функции $y = a^x$, считая, что $a > 0$, $a \neq 1$.

Для логарифмической функции $x = \log_a y$ необходимо дополнительно потребовать, чтобы y был положительным, так как $a^x > 0$, и для определения x из соотношения $a^x = y$ нужно, чтобы y был больше 0.

Подумайте самостоятельно, какие ограничения нужно наложить на переменные для рассмотрения степенных функций.

2. *Свойства и график показательной функции* $y = a^x$:

- область определения: множество всех действительных чисел **R**;
- монотонность: при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает;
- положительность: значения функции $y = a^x$ положительны;
- область значений: все положительные числа, т.е. интервал $(0, +\infty)$.

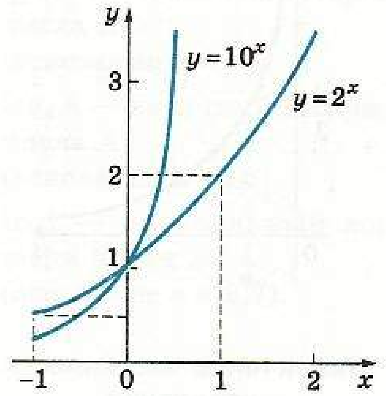
3. *Свойства и график логарифмической функции* $y = \log_a x$:

- область определения: $x > 0$;
- промежутки постоянного знака:
  - при $a > 1$
    $y = 0$ при $x = 1$;
    $y < 0$ при $0 < x < 1$;
    $y > 0$ при $x > 1$;
  - при $0 < a < 1$
    $y < 0$ при $x > 1$;
    $y > 0$ при $0 < x < 1$;
- монотонность: функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ возрастает на всей области определения, при $0 < a < 1$ — убывает;
- область значений: множество всех действительных чисел **R**.

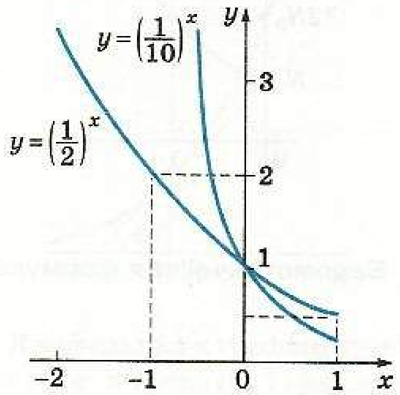
Зачем нужны показательные и логарифмические функции?

1. *Продолжим примеры* различных процессов, которые описываются с помощью пока-

Графики показательных функций

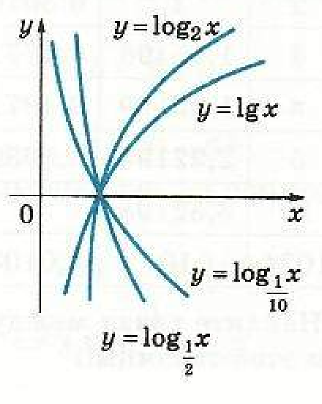


$y = a^x$, $a>1$



$y = a^x$, $0 < a < 1$

Графики логарифмических функций



зательных и логарифмических функций (два примера — полет ракеты переменной массы и звукоизоляция стен — были рассмотрены на предыдущем занятии).

• *Радиоактивный распад.*

Изменение массы радиоактивного вещества происходит по формуле $m(t) = m_0 \cdot 2^{-kt}$, где m_0 — масса вещества в начальный момент $t = 0$; m — масса вещества в момент времени t; k — некоторая константа (период полураспада).

• *Рост народонаселения.*

Изменение численности населения в стране на небольшом отрезке времени с хорошей точностью описывается формулой $N = N_0 2^{\alpha t}$, где N_0 — число людей при $t = 0$; N — число людей в момент времени t; α — некоторая константа.

По аналогичной формуле вычисляется изменение числа особей в популяциях животных при определенных условиях (например, когда достаточно пищи и нет внешних врагов).

• *Барометрическая формула.*

Давление воздуха убывает с высотой (при постоянной температуре) по закону $p = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$, где p_0 — давление на уровне моря ($h = 0$); p — давление на высоте h; H — некоторая константа, зависящая от температуры. При температуре 20 °C $H \approx 7{,}7$ км.

2. *Роль основания a.* Нужно ли рассматривать показательные и логарифмические функции при различных основаниях a?

На самом деле достаточно было бы ограничиться одним основанием, например, взяв $a = 10$. Действительно, $a^x = 10^{kx}$, где $k = \lg a$:

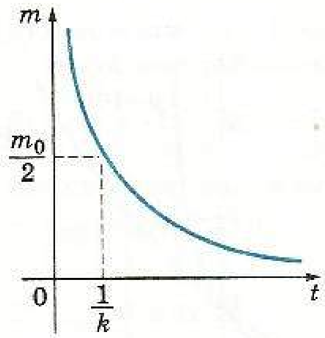
$$a^x = \left(10^{\lg a}\right)^x = 10^{(\lg a)x} = 10^{kx}, k = \lg a.$$

По формуле перехода к другому основанию получим

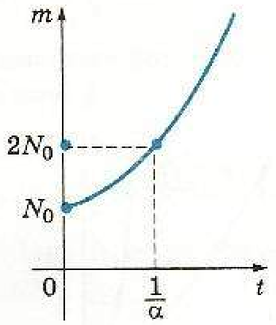
$$\log_a x = k \lg x, \text{ где } k = \frac{1}{\lg a}.$$

Поэтому вместо функций вида $y = a^x$ можно рассматривать функции с одним и тем же основанием, но с коэффициентом при значении аргумента: $y = 10^{kx}$. Аналогично и для логарифмических функций достаточно было

Радиоактивный распад



Увеличение численности населения



Барометрическая формула

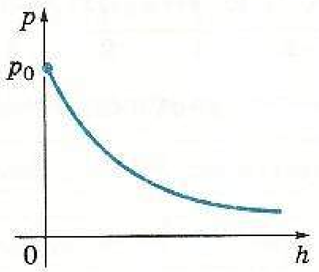


Таблица логарифмов

a	$\log_2 a$	$\lg a$
2	1	0,30103
3	1,58496	0,47712
π	1,65149	0,49715
5	2,32193	0,69897
10	3,32193	1
1024	10	3,01030

(Найдите связи между числами этой таблицы!)

бы рассматривать функции с фиксированным основанием, но с коэффициентом при значении функции: $y = k\lg x$.

Некоторые основания a играют особую роль:

- $a = 10$ (*десятичный логарифм*). Поскольку мы записываем числа в десятичной системе счисления, запись числа в виде $A = 10^{\lg A}$ помогает понять порядок числа A. Заметим, что для натурального числа A число $[\lg A] + 1$ показывает число цифр в десятичной записи числа A ($[a]$ обозначает целую часть числа a);
- $a = 2$ (*двоичный логарифм*). В информатике используется двоичная система счисления;
- $a = e$ (*натуральный логарифм*). Это число названо в честь Л. Эйлера, оно иррационально и приблизительно равно 2,7.

Почему выполняются перечисленные свойства показательных и логарифмических функций?

1. *Монотонность показательной функции.* Возьмем основание $a > 1$. Докажем, что $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$. Сначала заметим, что $a^x > 1$ при $x > 0$ (подумайте, почему).

Далее выполним преобразование: $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2 - x_1} - 1\right)$. Оба множителя в этом произведении положительны, поэтому $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Заменяя a на $\frac{1}{a}$, получим доказательство того, что $y = a^x$ при $0 < a < 1$ убывает на всей числовой оси.

2. *Монотонность логарифмической функции.* Пусть $a > 1$.

Докажем, что $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$. Сначала заметим, что $\log_a x > 0$ при $x > 1$ (подумайте, почему).

Выполним преобразование: $\log_a x_2 - \log_a x_1 = \log_a \frac{x_2}{x_1} > 0$, так как $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} > 1$.

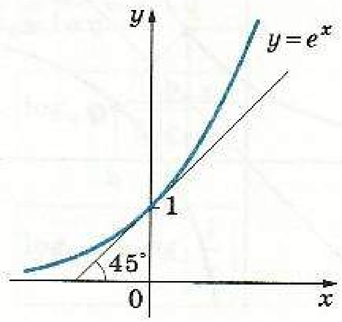
Заменим a на $\frac{1}{a}$, тогда $0 < \frac{1}{a} < 1$; $\log_{\frac{1}{a}} x_2 - \log_{\frac{1}{a}} x_1 = \log_{\frac{1}{a}} \frac{x_2}{x_1} = \log_a \frac{x_1}{x_2} < 0$, так как $\frac{x_1}{x_2} < 1$.

Таким образом мы доказали, что функция

Логарифмы, имеющие примечательные основания

- $\lg A$ — десятичный логарифм числа A (основание $a = 10$);
- $\log_2 A$ — двоичный логарифм числа A (основание $a = 2$);
- $\ln A$ — натуральный логарифм числа A (основание $e \approx 2,7$).

Показательная функция



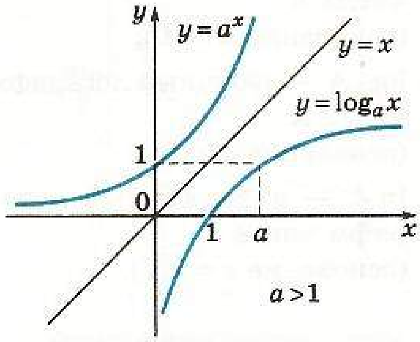
Касательная к графику функции $y = e^x$ в точке (0; 1) наклонена к оси абсцисс под углом 45°. Это свойство определяет число e.

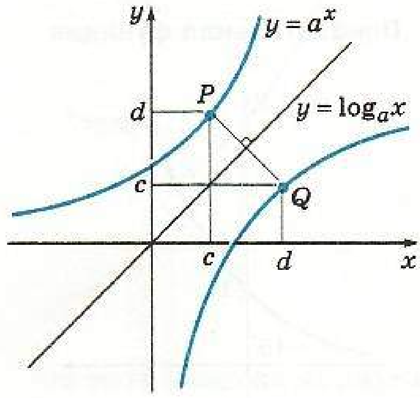
Монотонность показательной и логарифмической функций

$$5 < x < 6$$
$$\Downarrow$$
$$32 < 2^x < 64$$
$$100\,000 < 10^x < 1\,000\,000$$

$$1\,000 < x < 2\,000$$
$$\Downarrow$$
$$3 < \lg x < 3{,}3$$

Симметрия графиков функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$





Сравнение значений числовых выражений

- $a^{x_1} > a^{x_2}$ $(x_1 > x_2,\ a > 1)$
- $a^{x_1} < a^{x_2}$ $(x_1 > x_2,\ a < 1)$

Нахождение области определения функции

- $y = \lg(x^2 - 4x)$, D: $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

Нахождение области значений (ОЗ) функции, заданной на промежутке

- $y = \log_2(x - 3)$, $x \in [4; 11]$ ОЗ: $[0; 3]$

$y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ убывает на всей области определения.

3. *Симметрия графиков функций* $y = a^x$ и $y = \log_a x$. Графики этих функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Возьмем точку $P(c; d)$ на графике функции $y = a^x$. По условию $d = a^c$. Тогда $c = \log_a d$ и точка $Q(d; c)$ лежит на графике функции $y = \log_a x$. Точки P и Q симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Как используются свойства показательных и логарифмических функций при решении задач?

1. *Сравнение значений числовых выражений*. Что больше: 1) 101^2 или 101^3?

Ответ очевиден: $101^3 = 101^2 \cdot 101$ — при умножении 101^2 на 101 число увеличивается. Рассмотрим 101^2 и 101^3 как значения показательной функции $y = 101^x$ при $x = 2$ и $x = 3$ с основанием $101 > 1$. Функция возрастает на всей числовой оси, поэтому для любых чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $101^{x_1} < 101^{x_2}$;

2) 26^4 или 5^8?

Число 26 близко к $25 = 5^2$ и 26^4 близко к $(5^2)^4 = 5^8$. Однако $26 > 25 \Rightarrow 26^4 > 25^4 = 5^8$. Мы использовали монотонность степенной функции $y = x^4$ при $x > 0$: для любых $0 < x_1 < x_2$ верно неравенство $x_1^4 < x_2^4$;

3) $\log_2 3 + \log_2 5$ или 4?

Выполним преобразование: $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$. Выразим 4 через логарифм: $4 = \log_2 2^4 = \log_2 16$. Функция $y = \log_2 x$ возрастает при $x > 0$. Поэтому $15 < 16 \Rightarrow \log_2 15 < \log_2 16 = 4$.

2. *Нахождение области определения функции*: 1) $y = \lg(x^2 - 4x)$. Область определения D этой функции — числа x, удовлетворяющие неравенству $x^2 - 4x > 0$; $x^2 - 4x = x(x - 4)$.

Ответ: $x < 0$ и $x > 4$, или $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

2) $y = \lg x + \lg(x - 4)$. Теперь необходимо выполнение одновременно двух неравенств

$$\begin{cases} x > 0; \\ x - 4 > 0, \end{cases} \quad \text{т.е. } D: x > 4.$$

Ответ: $x > 4$, или $x \in (4; +\infty)$.

3. *Нахождение области значений (ОЗ) функции, заданной на промежутке*:

1) $y = 2^{x-1}$, $x \in [0; 2]$,

$2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^x$.

Функция $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ возрастает на всей числовой оси. Ее наименьшее значение на промежутке достигается на левом конце, т.е. при $x = 0$ (при этом $y = \frac{1}{2}$); наибольшее значение — на правом конце $x = 2 \Rightarrow y = 2$. При изменении x от 0 до 2 значения функции y заполняют промежуток от $\frac{1}{2}$ до 2.

Ответ: $\frac{1}{2} \le y \le 2$, или $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

2) $y = \log_2(x - 3)$, $x \in [4; 11]$.

Функция определена и возрастает на этом промежутке. Ее наименьшее значение достигается на левом конце: $x = 4$, $y = \log_2 1 = 0$, наибольшее значение принимается при $x = 11$, $y = \log_2 8 = 3$. Область значений: $0 \le y \le 3$, или $[0; 3]$.

Основные формулы и соотношения

- $\boxed{y = a^x}$

  $a > 0,\ a \ne 1;$

  $a > 1,\ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2};$

  $0 < a < 1,\ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}.$

- $\boxed{y = \log_a x}$

  $x > 0,\ a > 0,\ a \ne 1;$

  $a > 1,\ 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2;$

  $0 < a < 1,\ 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$

- $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

- $\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$

- $\boxed{\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}}$

Вопросы и упражнения

1. Укажите, какие из следующих показательных функций возрастают, а какие убывают на всей числовой оси:

1) $y = 5^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 5) $y = 2^{-x}$;

2) $y = 3^{x-1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$; 6) $y = \frac{3^x}{4^{x-1}}$.

2. Постройте графики следующих функций:

1) $y = 2^{-x}$; 3) $y = 2 \cdot 10^x$; 5) $y = -3^{-x}$;

2) $y = 3^{x+1}$; 4) $y = 2^x + 2^{x-1}$; 6) $y = 4^{x-2}$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций, заданных на промежутке:

1) $y = 2^{x+2}$, $[-1; 1]$; 3) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{2x}$, $[0; 1]$;

2) $y = 2 \cdot 3^{2-x}$, $[-2; 1]$; 4) $y = 2^{-x} + 3^{-x}$, $[-2; -1]$.

4. Найдите области определения следующих функций:

1) $y = \log_2(x - 3)$;
3) $y = \log_2 \dfrac{x+3}{2-x}$;
2) $y = \log_2(1 - x^2)$;
4) $y = \lg(x + 2) + \lg(x - 1)$.

5. Найдите области значений функций, заданных на промежутке:

1) $y = \log_2(x + 3)$, $[-1; 5]$;
3) $y = 1 - \lg x$, $[0{,}01; 10]$;
2) $y = 2 - \log_2(3x - 1)$, $[3; 11]$;
4) $y = \lg x + \log_2 x$, $[1; 2]$.

Занятие 6
Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Примеры

1. *Решение простейших показательных уравнений*:

- $10^x = 1000$; $1000 = 10^3$; $10^x = 10^3 \Leftrightarrow x = 3$.
- $10^x = 2 \Leftrightarrow x = \lg 2$.

2. *Решение простейших логарифмических уравнений*:

- $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$.

3. *Решение простейших показательных неравенств*:

- $3^x < \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{3} = 3^{-1}$;
  $3^x < 3^{-1} \Leftrightarrow x < -1$.
- $10^x \geq 2$; $2 = 10^{\lg 2}$;
  $10^x \geq 10^{\lg 2} \Leftrightarrow x \geq \lg 2$.

4. *Решение простейших логарифмических неравенств*:

- $\log_2 x > -1$; $x > \dfrac{1}{2}$.
  ОДЗ: $x > 0$; $1 < x \leq 10$.
- $\lg(x - 1) \leq 1$.
  ОДЗ: $x > 1$;
  $\begin{cases} x-1 \leq 10, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 11$.
- $\log_{\frac{1}{2}} x > -1 \Leftrightarrow$ ОДЗ: $x > 0$;
  $0 < x < 2$.
- $\log_2(x^2 + 3x) < 2 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x < 4, \\ x^2 + 3x > 0. \end{cases}$

Что полезно помнить при решении уравнений и неравенств, содержащих показательные и логарифмические функции?

1. *Решение простейшего показательного уравнения*:

$$(a > 0,\ a \neq 1),\ a^x = a^k \Leftrightarrow x = k$$

— сравниваем степени с одинаковым основанием.

$$(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0),\ a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

2. *Решение простейшего логарифмического уравнения*:

$$(a > 0,\ a \neq 1),\ \log_a x = \log_a k \Leftrightarrow x = k;$$
$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

3. *Решение простейшего показательного неравенства*:

$$(a > 1),\ a^x > a^k \Leftrightarrow x > k;$$
$$(0 < a < 1),\ a^x > a^k \Leftrightarrow x < k;$$
$$(a > 1,\ b > 0),\ a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b;$$
$$(0 < a < 1,\ b > 0),\ a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b;$$
$$(b \leq 0),\ a^x > b \Leftrightarrow x \text{ — любое число}.$$

4. *Решение простейшего логарифмического неравенства*:

$$(a > 1,\ k > 0),\ \log_a x > \log_a k \Leftrightarrow x > k;$$

$$(a > 1),\ \log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b;$$

$$(a > 1),\ \log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$$

При решении логарифмических неравенств полезно указывать область допустимых значений (ОДЗ).

Если используются логарифмы по основаниям, меньшим 1, то надо помнить, что соответствующая функция является убывающей.

Основой решения показательных и логарифмических неравенств является то, что функции вида $y = Aa^{kx}$ и $y = B\log_a x$ монотонны на всей области определения. Каждое свое значение c они принимают ровно один раз, например в точке x_0. По одну сторону от этой точки значения функции больше c, по другую — меньше.

Как сводить уравнения к простейшим?

Показатель является функцией от x.

1. $2^{1-x} = 8 \Leftrightarrow 2^{1-x} = 2^3 \Leftrightarrow 1 - x = 3 \Leftrightarrow x = -2.$

2. $2^{1-x} = 5 \Leftrightarrow 2^{1-x} = 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow 1 - x = \log_2 5 \Leftrightarrow x = 1 - \log_2 5.$

Вместо записи $5 = 2^{\log_2 5}$ можно логарифмировать обе части уравнения по основанию 2: $1 - x = \log_2 5.$

3. $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 31.$

Слагаемые лишь постоянными множителями отличаются от 5^x:

$$5^{x-1} = 5^{-1} \cdot 5^x = \frac{5^x}{5};\ 5^{x+1} = 5 \cdot 5^x;$$

$$5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 5^x\left(\frac{1}{5} + 1 + 5\right) = 5^x \cdot \frac{31}{5}.$$

$$\frac{31}{5} \cdot 5^x = 31 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

Чтобы не возиться с дробями, лучше выносить за скобку наименьшее слагаемое:

$$5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} =$$

$$= 5^{x-1}(1 + 5 + 25) = 31 \cdot 5^{x-1}.$$

4. $25^x - 5^x = 20.$

Вводим новое неизвестное $5^x = y$. Видим, что $25^x = 5^{2x} = y^2$.

$$y^2 - y - 20 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 5,\ y_2 = -4.$$

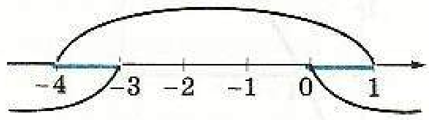
$5^x = 5$, $x = 1$; $5^x = -4$ — решений нет $\Rightarrow x = 1$.

Решаем два квадратных неравенства и находим общие решения:

$$x^2 + 3x < 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 1;$$

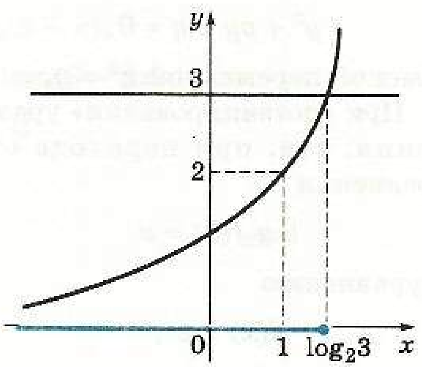
$$x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow x < -3 \text{ или } x > 0$$

Ответ: $(-4; -3) \cup (0; 1)$.

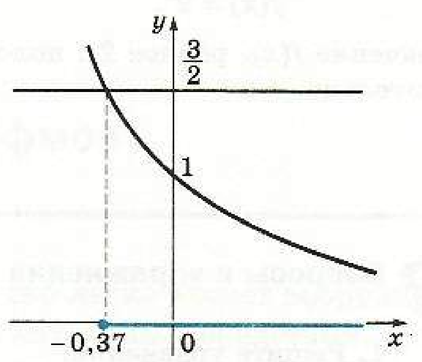


Графическое решение показательных неравенств

- $2^x \le 3$



- $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{3}{2}$

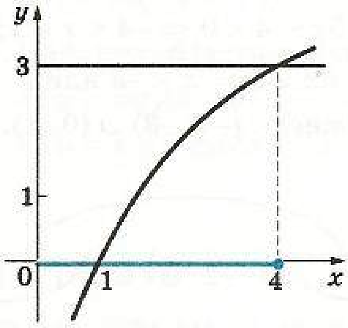


$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2} = -\log_3\frac{3}{2} =$$

$$= -1 + \log_3 2 \approx -0{,}37$$

Графическое решение логарифмических неравенств

- $\log_2 x \le 2$



Уравнение вида $2^{f(x)} = 2^a$ равносильно уравнению $f(x) = a$.

В общем виде уравнение

$$a^{2x} + pa^x + q = 0$$

сводится к квадратному уравнению

$$y^2 + py + q = 0$$

заменой переменной $a^x = y$.

При «потенцировании» уравнения, т.е. при переходе от уравнения

$$\log_2 f(x) = a$$

к уравнению

$$f(x) = 2^a,$$

заботиться об ОДЗ не надо, т.е. нет необходимости проверять условие $f(x) > 0$, так как при всяком x, удовлетворяющем уравнению

$$f(x) = 2^a,$$

значение $f(x)$, равное 2^a, положительно.

5. $\log_2(2 - x) = 3 \Leftrightarrow 2 - x = 2^3 \Leftrightarrow x = -6.$

6. $\log_2(2 - x) = \log_2(5 - 2x) \Rightarrow$
$2 - x = 5 - 2x \Leftrightarrow x = 3.$

Теперь переход не сохраняет равносильности — корень линейного уравнения $2 - x = 5 - 2x$ не попадает в ОДЗ исходного уравнения. При $x = 3$ значения функций под знаком логарифма действительно равны: $2 - 3 = 5 - 2 \cdot 3 = -1$, но отрицательны $\Rightarrow$ корней нет.

7. $\log_{\frac{1}{2}} x + 2\log_2 x + \log_4 x = 3$.

Перейдем к основанию 2:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \dfrac{1}{2}} = -\log_2 x; \quad \log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} =$$

$$= \frac{1}{2}\log_2 x.$$

Перепишем уравнение:

$$(\log_2 x)\left(-1 + 2 + \frac{1}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Переходы к простейшим неравенствам выполняются аналогично.

8. $2^{2-x} < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{2-x} < 2^{-2} \Leftrightarrow 2 - x < -2 \Leftrightarrow x > 4.$

9. $\log_2(2 - x) < 0 \Rightarrow 2 - x < 1 \Rightarrow x > 1.$

Переход не был равносильным. Надо добавить условие $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$, которое удобнее записывать до начала преобразований. Итак, имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 2 - x < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $1 < x < 2$, или $(1; 2)$.

? Вопросы и упражнения

1. Решите уравнения:

1) $4^x = 8$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1} = 16$; 5) $3^{x+2} = 9^{2x-3}$;

2) $3^{x-1} = 27$; 4) $10^{x^2+x} = 100$; 6) $2^{x+\frac{1}{x}} = 4\sqrt{2}$;

7) $2^{x^2} = \frac{8^x}{16}$; 12) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$; 17) $2^{x+1} + 4 = 80$;

8) $3^{x^2-1} = 27\sqrt{3} \cdot 3^x$; 13) $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21$; 18) $3^x + 3^{1-x} = \frac{28}{3}$;

9) $10^x = 2$; 14) $4^x + 2^{2x+1} - 16^{\frac{x}{2}-1} = 47$; 19) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$;

10) $3^x = 2^{2-x}$; 15) $4^x - 3^{\frac{x-1}{2}} = 3^{\frac{x+1}{2}} - 2^{2x-1}$; 20) $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{17}{15}$.

11) $2^x \cdot 5^{x+1} = 100$; 16) $5 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^{x-1} + 56$;

2. Решите неравенства:

1) $2^x \le 16$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$; 5) $4^{x-1} + 1 \ge 0$; 7) $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} \le 21$;

2) $3^{1-x} \ge 27$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \le \frac{9}{4}$; 6) $27^x > 3^{x+6}$; 8) $2^{2x+1} + 4^x \ge 80$.

3. Решите уравнения:

1) $\log_4 x = 2$; 7) $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$;

2) $\log_5 x = -2$; 8) $\log_2(x - 7) = \log_2(11 - x)$;

3) $\log_2(1 - 3x) = 3$; 9) $\log_3(x - 5) = \log_3(2 - x)$;

4) $\log_4(2 - x) = \log_2 3$; 10) $\log_5(x^2 - 4x) = \log_5(3 - 2x)$;

5) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) = -2$; 11) $\log_2 x + \log_4 x = 3$;

6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) = 0$; 12) $\frac{\log_2 x}{\log_2 3} = 3$.

4. Решите неравенства:

1) $\lg(x - 1) < 2$; 5) $\frac{1}{\log_2 x - 2} \le 1$;

2) $\log_2(2 - x) \le 3$; 6) $\lg x \le (\lg x)^2$;

3) $\lg(x^2 - 3x) > 1$; 7) $\lg(x - 2) + \lg(x + 2) \le 1$;

4) $\log_2(2x - 3) \le \log_2(x + 2)$; 8) $\lg \log_2(x + 1) > 1$.

БЕСЕДА

Вычисление степеней и логарифмов

Общие сведения

Сейчас, когда каждый человек достаточно легко может вооружиться калькулятором или более мощным вычислительным средством, трудно представить, сколько хлопот доставляли человеку вычисления в прошлом. Изобретение логарифмов было огромным шагом на пути решения практических задач, связанных с вычислениями. Возможность с помощью логарифмов сводить умножение к сложению, а возведение в степень — к умножению потребовала составлять подробные таблицы логарифмов, которые существуют с начала XVII в. Еще недавно в библиотеках стояли толстенные тома таблиц, в которых были приведены значения логарифмов со многими десятичными знаками, в обязательный комплект школьных учебников входила отдельная «Таблица четырехзначных логарифмов», а каждый инженер носил в кармане логарифмическую линейку, уметь работать с которой полагалось и каждому школьнику.

Появившаяся легкость в выполнении самих вычислений обострила другую проблему — понимает ли человек, что он хочет вычислить, как ему поставить вычислительную задачу компьютеру или другому техническому устройству, как перевести эту задачу на понятный этому устройству язык. При вычислении степеней надо научиться видеть за различными названиями и обозначениями их общую суть, ощущать связь между ними, приобрести опыт и уверенность в том, что вы всегда (может быть, с помощью книг и учителей) сможете разобраться в запутанных и громоздких формулах.

Логарифмы (несмотря на сложность их обозначения) как раз и приспособлены к тому, чтобы связать воедино различные задачи, связанные со степенями.

В вычислительных задачах встречаются степени различных чисел в разных сочетаниях, например, при вычислении выражения $A = \dfrac{(2{,}1)^5 \cdot 7^{10}}{3^{12}}$ надо возводить в степень разные числа, умножать и делить степени. Зачем так много степеней? Нельзя ли обойтись степенями какого-то одного основания? Конечно, можно.

Для вычисления выражения A с помощью калькулятора, умеющего вычислять 10^x, надо все числа привести к степени 10: $A = \dfrac{10^{5k_1} \cdot 10^{10k_2}}{10^{12k_3}} = 10^{5k_1+10k_2-12k_3}$, где k_1, k_2 и k_3 — логарифмы чисел 2,1; 7 и 3 по основанию 10. Внимательный читатель может дополнительно заметить, что $2{,}1 = \dfrac{3 \cdot 7}{10}$, и сделать упрощения: $A = 10^{-7k_3+15k_2-5}$, избавившись от логарифма числа 2,1.

Правила вычисления степеней

Первое правило. Выбрать одно удобное основание, например a, и привести любую степень к основанию a, т.е. представить любую степень c^x в виде a^{kx} при некотором k. Этот коэффициент k и есть логарифм: $c = a^{\log_a c}$, поэтому, обозначая $\log_a c$ через k, получим: $c^x = \left(a^{\log_a c}\right)^x = a^{kx}$. Это правило позволяет пользоваться каким-то одним основанием. В некоторых задачах удобно брать $a = 10$ (десятичные логарифмы), в других (особенно дискретных задачах) — $a = 2$, в третьих — универсальное основание e, которое удобно в тех случаях, когда приходится оценивать скорость роста (натуральные логарифмы).

Второе правило. При логарифмировании можно также выбрать одно удобное основание и сводить все логарифмы к этому основанию. Для этого существует специальная формула, которая выведена ранее.

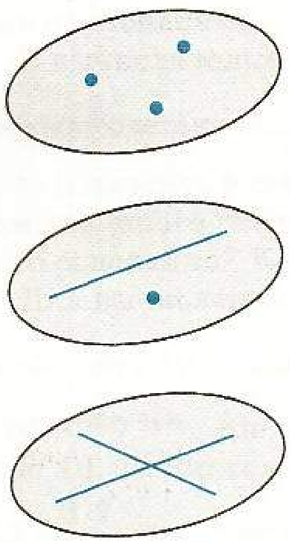
В одних задачах удобно брать логарифмы по основанию 10 (десятичные логарифмы), в других задачах будут полезны натуральные логарифмы, в третьих (дискретных) задачах часто используют двоичные логарифмы — логарифмы по основанию 2.

Таким образом, важно запомнить, что математика создала аппарат для упрощения работы со степенями, который позволяет связать между собой по-разному представленные выражения и функции.

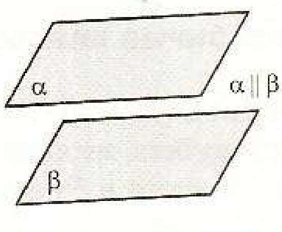
ГЛАВА 3 Прямые и плоскости в пространстве

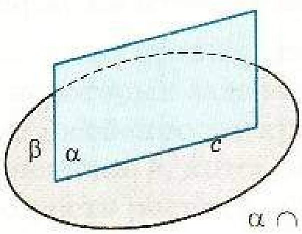
Занятие 1
Взаимное расположение прямых и плоскостей

Способы задания плоскости



Расположение плоскостей





$\alpha \cap \beta = c$

Как задать и описать расположение прямых и плоскостей?

1. *Способы задания плоскости*:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- прямой и точкой вне ее;
- двумя пересекающимися прямыми.

Это перечисление означает, что существует одна и только одна плоскость, проходящая через указанные объекты: три точки, не лежащие на одной прямой, прямую и точку вне ее, две пересекающиеся прямые.

2. *Расположение двух плоскостей*:

- плоскости не имеют общих точек, не пересекаются. В этом случае говорят, что *плоскости параллельны*;
- имеют общие точки, пересекаются. В этом случае утверждается, что две плоскости *пересекаются по прямой*. Это означает, что общие точки двух пересекающихся плоскостей составляют некоторую прямую.

3. *Расположение прямой и плоскости*:

- *прямая* может *лежать в плоскости*. При этом если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся *прямая* целиком *лежит* в этой *плоскости*;
- прямая может иметь с плоскостью ровно одну общую точку: *прямая пересекает плоскость*;

• прямая и плоскость не имеют общих точек: *прямая параллельна плоскости*.

4. *Расположение двух прямых*:

• две прямые лежат в одной плоскости. Тогда есть две возможности: либо они *пересекаются*, т. е. имеют одну общую точку, либо *параллельны*, т. е. не имеют общих точек (и не забудьте, что при этом прямые лежат в одной плоскости);

• не лежат в одной плоскости. Такие прямые называются *скрещивающимися*. Разумеется, скрещивающиеся прямые не имеют общих точек, иначе они лежали бы в одной плоскости.

5. *Как узнать, являются ли две прямые скрещивающимися*:

• найти плоскость, в которой лежит одна из этих прямых, а вторая пересекает эту плоскость, но при этом в точке, не лежащей на первой прямой;

• надо знать, что они не параллельны, но могут быть расположены в двух параллельных плоскостях.

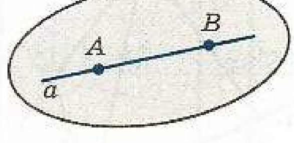
Почему верно приведенное перечисление взаимного расположения прямых и плоскостей?

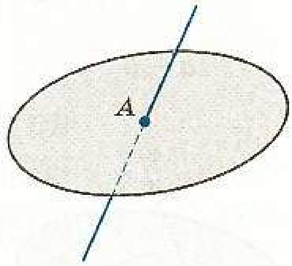
Это достаточно трудный вопрос. С наглядной точки зрения все (или почти все) изложенное очевидно. Однако все приведенные факты доказать не удастся — они используют некоторые первоначальные, исходные понятия — точку, прямую, плоскость, пространство — и у нас не на что опереться, кроме как на свои наглядные представления и интуицию. Со времен Евклида взаимоотношения между первичными понятиями описываются некоторыми соглашениями — аксиомами, из которых можно логическим путем получать новые следствия.

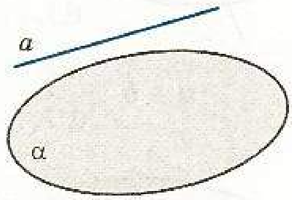
Конечно, сделано слишком много исходных соглашений — аксиом (и не сформулированы еще некоторые, также необходимые для строгих доказательств) — их число можно было бы сократить.

Докажем, например, первый признак скрещивающихся прямых со ссылкой на предыдущие утверждения.

Расположение прямой и плоскости

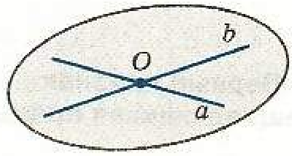




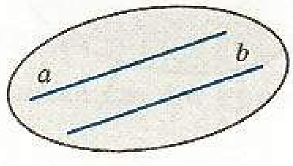


$a \parallel \alpha$

Расположение двух прямых

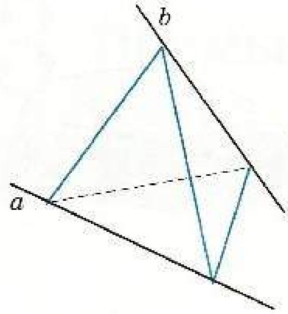


$a \cap b = O$

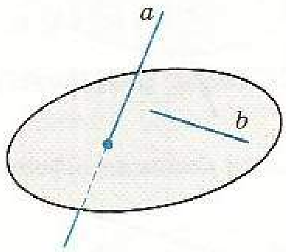


$a \parallel b$

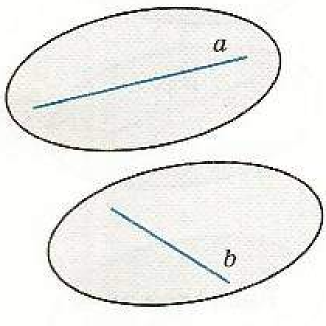
Скрещивающиеся прямые



$a \dot{-} b$

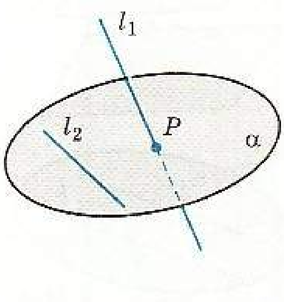


$a \dot{-} b$



$a \dot{-} b$

Первый признак скрещивающихся прямых



Дано: $l_2 \in \alpha$, $l_1 \cap \alpha = P$, $P \notin l_2$.
Доказать: $l_1 \dot{-} l_2$.

Пусть даны две прямые l_1 и l_2, плоскость α, содержащая прямую l_1 и имеющая с прямой l_2 лишь одну общую точку P. Нужно доказать, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются, т.е. не лежат в одной плоскости.

Если бы прямые l_1 и l_2 лежали в некоторой плоскости β, то в этой плоскости лежали бы прямая l_1 и точка P, не лежащая на этой прямой. Эти же объекты лежат и в плоскости α. Так как существует лишь одна плоскость, содержащая прямую и не принадлежащую ей точку, то плоскость β совпадает с плоскостью α. Однако по условию прямая l_2 не лежит в плоскости α и имеет с ней лишь одну общую точку. Полученное противоречие доказывает теорему.

Что можно сказать о взаимном расположении прямых и плоскостей, содержащих соответственно ребра и грани куба?

Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$.

Прямые и плоскости, проходящие через вершины, ребра или грани куба, будем указывать с помощью букв, обозначающих вершины.

Например, прямая AB или плоскость $AA'BB'$.

Зафиксируем одно ребро, например, AA'.

1) Какие ребра параллельны ребру AA'?

Это ребра BB', CC', DD'.

2) Какие ребра лежат на прямых, пересекающихся с прямой AA'?

Это ребра AD, AB, $A'D'$ и $A'B'$.

3) Какие ребра лежат на прямых, скрещивающихся с прямой AA'?

Это ребра $B'C'$, $C'D'$, BC и CD. Для доказательства можно воспользоваться признаком скрещивающихся прямых. Так, плоскость $A'B'BA$ содержит прямую AA' и пересекается с прямой $B'C'$. Аналогичные плоскости можно найти и для остальных трех ребер.

4) Сколько всего есть пар параллельных ребер?

Для одного ребра есть три ребра, ему параллельных. Всего ребер 12. Значит, упорядоченных пар параллельных ребер (первое параллельно второму) будет $3 \cdot 12 = 36$. Просто параллельных пар будет вдвое меньше, так как каждая из них засчитана дважды (например, $AA' \parallel BB'$, $BB' \parallel AA'$).

Ответ: 18 пар.

5) Сколько всего есть пар пересекающихся ребер и пар скрещивающихся ребер? Подсчет выполняется аналогично: $(4 \cdot 12) : 2 = 24$ и $(4 \cdot 12) : 2 = 24$.

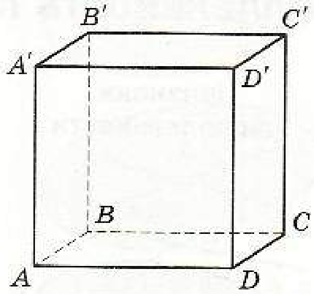
Проверим, учтены ли все пары ребер. Всего число пар равно $(12 \cdot 11) : 2 = 66$. С другой стороны, $18 + 24 + 24 = 66$. Каждая из 66 пар ребер попала ровно в одну группу пар — параллельных, пересекающихся или скрещивающихся.

Аналогично можно подсчитать, что из $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ пар плоскостей, содержащих грани куба, есть 3 пары параллельных (пары противоположных граней) и 12 пар пересекающихся: $(4 \cdot 6) : 2$.

Пар (прямая, плоскость) всего $12 \cdot 6 = 72$. Таких пар, для которых прямая лежит в плоскости, $6 \cdot 4 = 24$. Пар, для которых прямая параллельна плоскости, $6 \cdot 4 = 24$ и столько же пар, для которых прямая пересекает плоскость.

Ответ: $24 + 24 + 24 = 72$.

Куб



- $AA' \parallel BB'$
  $AA' \parallel CC'$
  $AA' \parallel DD'$

- $AA' \cap AD$
  $AA' \cap AB$
  $AA' \cap A'D'$
  $AA' \cap A'B'$

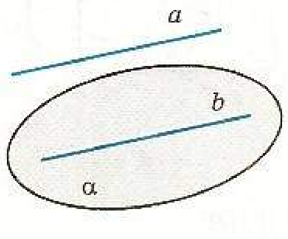
- $AA' \dot{-} B'C'$
  $AA' \dot{-} C'D'$
  $AA' \dot{-} BC$
  $AA' \dot{-} CD$

Вопросы и упражнения

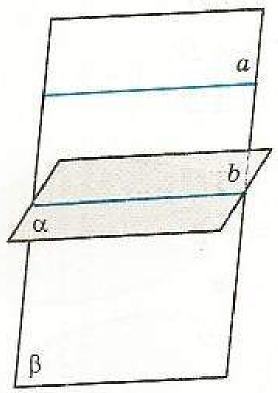
1. Каким образом можно задать плоскость?
2. Как могут быть расположены две плоскости?
3. Как могут быть расположены прямая и плоскость?
4. Как могут быть расположены две прямые?
5. Как узнать, являются ли две прямые скрещивающимися?
6. Какие пары ребер четырехугольной пирамиды лежат на скрещивающихся прямых?
7. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Назовите ребра, параллельные ребру AA'.
8. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Перечислите ребра, которые лежат на прямых, пересекающихся с прямой AA'.
9. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Перечислите ребра, которые лежат на прямых, скрещивающихся с прямой AA'.

Занятие 2
Параллельность прямых и плоскостей

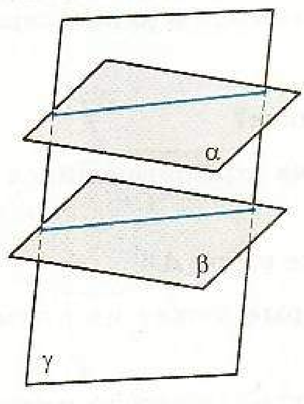
Признаки параллельности



$a||b,\ b \in \alpha$



$a||\alpha,\ \alpha \cap \beta = b$



$\alpha||\beta,\ \gamma \cap \alpha,\ \gamma \cap \beta$

Как распознать основные случаи параллельности прямых и плоскостей?

Признаки параллельности прямых и плоскостей.

1. Пусть прямая не лежит в некоторой плоскости и параллельна какой-то прямой этой плоскости. Тогда исходная прямая параллельна данной плоскости.

2. Пусть прямая параллельна некоторой плоскости. Если через эту прямую провести еще одну плоскость, которая пересекает заданную, то их линия пересечения параллельна исходной прямой.

3. Пусть две плоскости параллельны, а третья плоскость их пересекает по некоторым прямым. Тогда эти прямые параллельны.

4. Пусть в одной плоскости нашлись две пересекающиеся прямые, которые соответственно параллельны двум прямым другой плоскости. Тогда эти две плоскости параллельны.

Почему верны указанные признаки?

Доказательства приведенных признаков параллельности прямых и плоскостей являются логическими упражнениями, которые полезно провести самостоятельно. Большинство из них использует рассуждение от противного. Для облегчения самостоятельной работы сформулируем отрицания доказываемых утверждений 1 — 3, в результате придем к утверждениям, противоречащим условиям теорем.

1. Если прямая не параллельна плоскости и не лежит в ней, то *прямая пересекает плоскость*.

2. Если плоскость, проведенная через прямую, пересекает другую плоскость и линия пересечения плоскостей не параллельна этой прямой, то *прямая не параллельна плоскости*. Действительно, если прямые не параллельны, то они или скрещиваются, или пересекаются.

Но по условию они лежат в одной плоскости, значит, они не могут быть скрещивающимися.

3. Если при пересечении двух данных плоскостей третьей линии пересечения не параллельны, то и данные *плоскости не параллельны*.

Докажем наиболее сложный признак 4.

Даны две плоскости α и β и две пары пересекающихся прямых: l_1, l_2 в плоскости α и m_1, m_2 в плоскости β. При этом $l_1 \parallel m_1$, $l_2 \parallel m_2$. Требуется доказать, что плоскости α и β параллельны.

Предположим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда остается лишь одна возможность — они пересекаются по некоторой прямой n. По признаку 1 каждая из прямых l_1 и l_2 параллельна плоскости β.

Прямая n является линией пересечения плоскостей α и β. По признаку 2 она должна быть параллельной каждой из прямых l_1 и l_2: плоскость α проходит через каждую из этих прямых и пересекает плоскость β по прямой n.

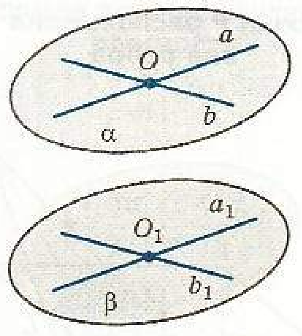
В плоскости α лежат три прямые: l_1, l_2 и n, причем $n \parallel l_1$ и $n \parallel l_2$. Тогда из планиметрии известно, что прямые l_1 и l_2 параллельны (если они различны). Это противоречит условию, по которому прямые l_1 и l_2 пересекаются. Теорема доказана.

Что можно сказать о различных сечениях куба плоскостью?

Рассмотрим, например, плоскость сечения куба $ABCDA'B'C'D'$, проходящую через точки M и N — середины ребер AB и AD.

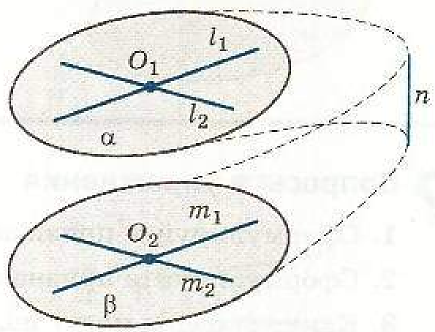
Пусть эта плоскость пересекает прямую CC' в некоторой точке P, лежащей между C и C', т.е. принадлежащей ребру CC', а не лежащей на его продолжении.

Рассмотрим диагональную плоскость $AA'C'C$. Она пересекает отрезок MN в точке Q — его середине, лежащей на диагонали основания AC. Прямая QP целиком лежит в плоскости сечения. Рассмотрим прямую OO' — одну из осей куба. Пусть R — точка пересечения прямых QP и OO'. Прямая MN параллельна плоскости диагонального сечения $BB'D'D$ (признак 1). Плоскость сечения про-



$a \cap b = O$, $a \in \alpha$, $b \in \alpha$,
$a \| a_1$, $b \| b_1$, $a_1 \in \beta$, $b_1 \in \beta$

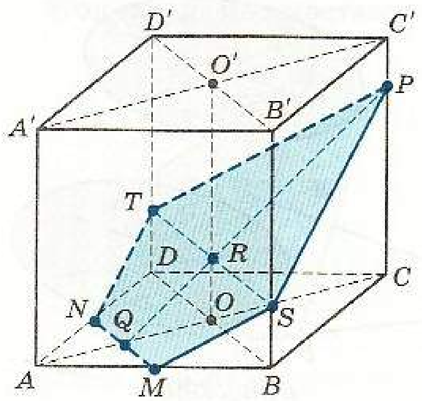
Доказательство параллельности прямых и плоскостей (признак 4)



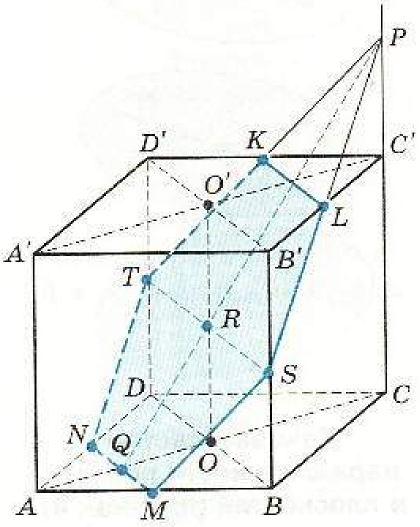
Дано: $l_1 \in \alpha$, $l_2 \in \alpha$,
$l_1 \cap l_2 = O_1$,
$m_1 \in \beta$, $m_2 \in \beta$,
$m_1 \cap m_2 = O_2$,
$l_1 \parallel m_1$, $l_2 \parallel m_2$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Точка *P* расположена на ребре



Точка P расположена вне ребра



ходит через эту прямую и пересекает плоскость $BB'D'D$ по некоторой прямой, которая должна быть параллельна MN (признак 2).

Точка R лежит на этой линии пересечения. Мы получим, таким образом, эту линию, проведя в плоскости $BB'D'D$ через точку R прямую, параллельную диагонали BD. Эта прямая пересекает ребра BB' и DD' в некоторых точках S и T. Пятиугольник $MSPTN$ и является искомым сечением.

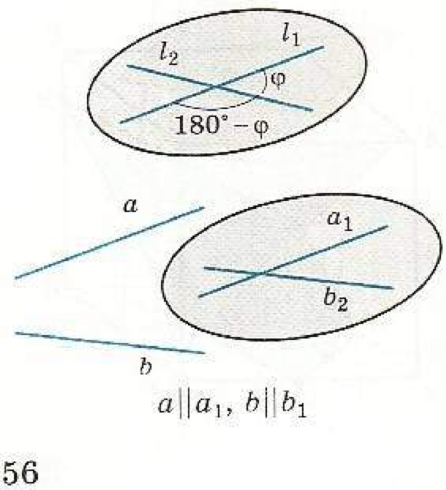
Если взять точку P на прямой CC' немного выше точки C', то получим в сечении шестиугольник, одна из сторон которого будет параллельна MN (признак 3). Когда это сечение пройдет через центр куба, то получится правильный шестиугольник. Проверьте это утверждение и рассмотрите самостоятельно другие сечения куба, проходящие через прямую MN.

Вопросы и упражнения

1. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.
3. Какие фигуры могут получаться в сечении треугольной призмы плоскостью?
4. Какие фигуры могут получаться в сечении куба плоскостью?
5. Докажите, что плоскости, проходящие через точки (A, D', B') и (C', B, D) куба $ABCDA'B'D'C'$, параллельны.
6. Какие ребра куба $ABCDA'B'D'C'$ скрещиваются с прямой MN.

Занятие 3
Углы между прямыми и плоскостями

Угол между прямыми



$a||a_1$, $b||b_1$

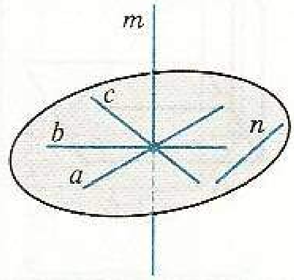
Как задаются углы между прямыми и плоскостями?

1. *Угол между двумя прямыми.* На плоскости две пересекающиеся прямые задают две пары равных между собой углов (вертикальные углы). Чтобы задать угол между двумя прямыми в пространстве, надо выбрать произвольную точку и провести через нее прямые, параллельные данным. Величины построенных плоских углов не будут зависеть от выбора начальной точки.

Две прямые в пространстве, которым соответствует прямой угол, называются *перпендикулярными*.

2. *Прямая, перпендикулярная плоскости.* Так называются прямые, перпендикулярные всякой прямой в этой плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости

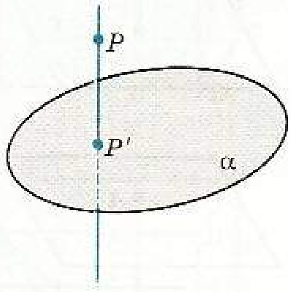


$m \perp n$, $m \perp a$, $m \perp b$, $m \perp c$

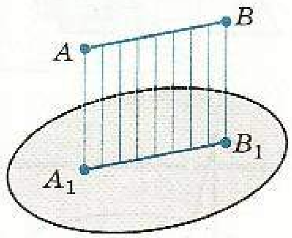
С помощью этого понятия можно определить *ортогональную проекцию* точки на плоскость. Проекцией на плоскость α точки P, не лежащей в этой плоскости, называется такая точка P', принадлежащая плоскости α, что прямая PP' перпендикулярна плоскости α. Проекцией точки, лежащей в плоскости α, считается сама эта точка.

Если требуется спроектировать некоторую фигуру на плоскость α, необходимо спроектировать на нее все точки этой фигуры.

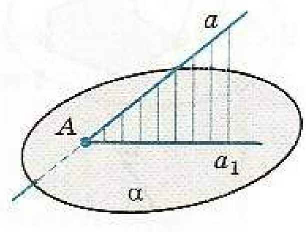
Ортогональная проекция



$P' \in \alpha$, $PP' \perp \alpha$



3. *Угол между прямой и плоскостью.* Спроектируем прямую на плоскость. Если прямая перпендикулярна плоскости, то ее проекцией будет одна точка. Если же нет, то проекцией будет некоторая прямая. В этом случае говорят, что прямая является *наклонной* к плоскости. Углом между наклонной и плоскостью считается угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

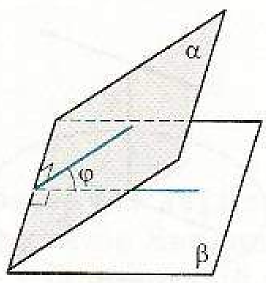


$(\widehat{a;\ \alpha}) = (\widehat{a;\ a_1})$

4. *Угол между двумя плоскостями.* Для измерения угла между пересекающимися плоскостями надо на линии пересечения этих плоскостей выбрать точку и провести через нее в каждой плоскости прямую, перпендикулярную линии пересечения. Угол между этими прямыми и считается углом между плоскостями.

Две плоскости *перпендикулярны*, если угол между ними прямой.

Угол между плоскостями

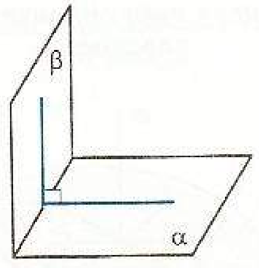


$(\widehat{\alpha;\ \beta}) = \varphi$

Зачем нужно понятие перпендикулярности в пространстве?

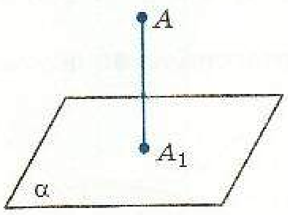
С помощью перпендикулярности можно определять и вычислять различные *расстояния* в пространстве.

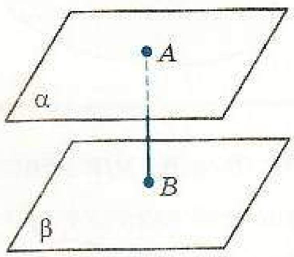
1. Расстояние от точки до плоскости вычисляется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость (расстояние от данной точки до ее проекции на плоскость).



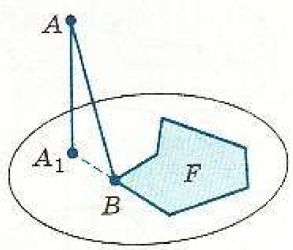
$\alpha \perp \beta$

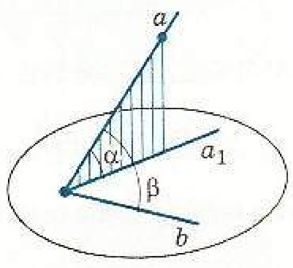
Определение расстояний

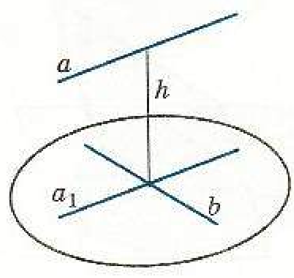




$\alpha \| \beta$







$a \dot{-} b$, $a_1 \| a$, $h \perp a$, $h \perp b$

2. Расстоянием между двумя параллельными плоскостями считается длина отрезка общего перпендикуляра к этим плоскостям, заключенного между этими плоскостями.

3. Если на плоскости задана некоторая фигура, то расстояние от произвольной точки в пространстве до этой фигуры определяется как наименьшее среди расстояний от данной точки до произвольной точки этой фигуры.

Спроектируем данную точку на плоскость. Тогда ближайшая к данной точке точка фигуры будет ближайшей и к ее проекции, и наоборот, чтобы найти точку фигуры, ближайшую к данной точке, достаточно найти точку, ближайшую к ее проекции.

4. Угол между прямой и плоскостью, определяемый как угол между прямой и ее проекцией, будет наименьшим среди углов, которые образует данная прямая с произвольными прямыми плоскости.

5. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми вычисляется как длина общего перпендикуляра.

Как аргументированно определять и вычислять углы между прямыми и плоскостями в пространстве?

Для этого полезно использовать *векторное исчисление* и *тригонометрические функции*. Этот вопрос будет изложен далее (см. гл. 5).

Сейчас в качестве наглядного примера рассмотрим углы между различными прямыми и плоскостями в *кубе*.

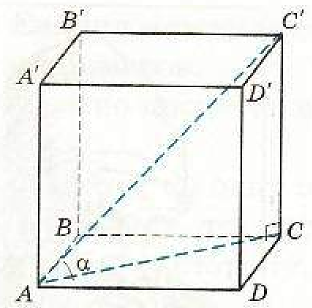
1. Каждое ребро куба, например ребро AA', перпендикулярно двум граням куба. Оно перпендикулярно любым прямым, лежащим в этих гранях, в частности восьми ребрам.

2. Каждая грань куба перпендикулярна четырем другим граням.

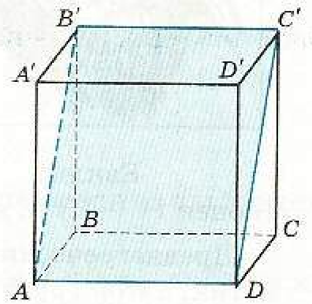
3. Рассмотрим любую диагональ куба, например AC'. Ее проекцией на плоскость $ABCD$ будет диагональ основания AC. Угол α наклона диагонали AC' к плоскости основания — это угол $C'AC$. Легко вычислить тригоно-

метрические функции угла α с помощью прямоугольного треугольника $AC'C$:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 35°.$$



4. Рассмотрим сечение, проходящее через два противоположных ребра куба (диагональное сечение), например сечение $AB'C'D$. Его угол с плоскостью основания $ABCD$ определяется как угол между прямыми $C'D$ и DC. Этот угол равен 45°.

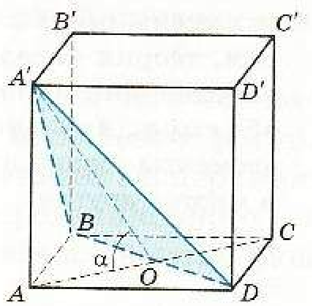


5. Рассмотрим сечение, проходящее через одну из вершин, например, A' и диагональ BD.

Как найти угол наклона этого сечения к плоскости основания?

Возьмем точку O — середину диагонали BD, и соединим ее с вершинами A и A'. Угол $A'OA$ и будет искомым, так как AO и $A'O$ перпендикулярны линии пересечения плоскостей:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \ \Rightarrow \alpha \approx 54°.$$



Вопросы и упражнения

1. Как определить угол между скрещивающимися прямыми в пространстве?
2. Какая прямая называется перпендикулярной плоскости?
3. Как определяется угол между прямой и плоскостью?
4. Как вычисляется угол между двумя плоскостями?
5. Как определяется расстояние между параллельными плоскостями?
6. Как определяется расстояние между скрещивающимися прямыми?

БЕСЕДА
Геометрия Евклида

Введение

Образцом логического совершенства в течение более чем двух тысяч лет является изложение начал геометрии, предпринятое Евклидом в III в. до н. э. Можно сказать, что это изложение — единственный в истории человечества пример строгой математической теории, с которой

Евклид
(конец IV — III в. до н. э.)

Древнегреческий математик, автор труда «Начала» в 13 книгах, в котором изложены основы геометрии, теории чисел, метод определения площадей и объемов, включающий элементы теории пределов и многое другие.

полагалось быть знакомым каждому образованному человеку. До сих пор большинство учебников геометрии следует пути, указанному Евклидом, а, например, вплоть до недавнего времени английские школьники просто пользовались современным переводом «Начал» Евклида в качестве учебника.

Разумеется, к концу XX в. распространились и иные взгляды. Они относятся к разным вопросам. Вот некоторые из них. Можно ли (и полезно ли) изучать геометрию, отказавшись от ее аксиоматической основы? Нужно ли вообще в рамках общего образования и культуры знакомиться с какой-либо аксиоматической теорией? Если да, то подходит ли для этого геометрия Евклида и нельзя ли найти более простые и доступные примеры? Насколько безупречна сама евклидова геометрия?

Мы не будем касаться этих вопросов. Само построение данной книги положительно отвечает на вопрос, можно ли, изучая математику, обойтись без знакомства с аксиоматическим методом. Но мы считаем, что каждый культурный человек должен быть знаком с историей вопроса о евклидовой геометрии, не связывая его, однако, ни с реальным изучением геометрии, ни с целью овладения новым для себя математическим методом.

Аксиоматика Евклида

Первая страница «Начал» Евклида (издание 1505 г.)

«Начала» Евклида (а точнее, каждая из тринадцати книг, составляющих этот труд) открываются определениями *основных понятий*. Вот несколько определений с первой страницы «Начал»:

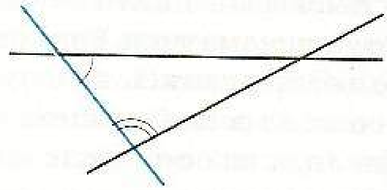
- «*Точка* есть то, что не имеет частей»;
- «*Линия* — длина без ширины. Концы же линии — точки»;
- «Поверхность — то, что имеет только длину и ширину. Концы же поверхности — линии»;
- «*Граница* — то, что является оконечностью чего-либо»;
- «*Фигура* — то, что содержится внутри каких-либо границ».

За определениями следуют основные положения, принимаемые без доказательств, — *по-*

стулаты, аксиомы. (Различие, которое делал Евклид между постулатами и аксиомами, не очень ясно.) Вот несколько примеров.

1. От каждой точки до всякой другой точки можно провести прямую линию.

2. Если прямая, падающая на две прямые, образует по одну сторону внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых, то, неограниченно продолженные, эти прямые пересекаются по эту сторону.



Это и есть знаменитый пятый постулат, равносильный аксиоме о единственности параллельной.

Затем с помощью основных понятий и аксиом чисто логическим путем доказываются теоремы (предложения). Так, в качестве четвертого по счету предложения Евклид доказывает «первый признак равенства треугольников».

Разумеется, Евклид пользуется многим из того, чего нет на самом деле в аксиомах (например, там нет ничего о наложении фигур, которое часто используется как своего рода мысленный эксперимент). Однако, за исключением нескольких частностей редакционного и языкового характера, уровень строгости Евклида считался вполне удовлетворительным вплоть до конца XIX в.

Современная аксиоматика евклидовой геометрии

Как было указано, почти все школьные учебники геометрии воспроизводят ту или иную аксиоматику, причем, как правило, в начале курса. При этом стараются сделать список возможно более простым и в то же время удобным для доказательства теорем. Образцом для такого построения, учитывающим достижения и язык математики, сложившиеся к концу XIX в., служит замечательная (хотя и не очень простая) система аксиом немецкого математика Гильберта, созданная им в 1899 г.

Д. Гильберт выделяет три системы неопределяемых (основных) объектов: точки, прямые и плоскости. Затем постулируются «отношения» между ними (принадлежность, находиться между, быть равными, конгруэнтными). Эти положения образуют пять групп аксиом. Например, во вторую группу аксиом («аксиомы порядка») попало следующее утверждение, на которое обратил внимание немецкий геометр Г. Паш в 1882 г. как на необходимую аксиому: «Если прямая входит внутрь треугольника через одну из его сторон, но не через его вершину, то она должна выходить из него через другую сторону».

Четвертая группа состоит из одной аксиомы о параллельности: «Через всякую точку, лежащую вне прямой a, проходит не более одной прямой, параллельной a».

В пятую группу включены две аксиомы о непрерывности, в том числе так называемая аксиома Архимеда: «При любых отрезках a и b можно отложить вдоль b отрезки, равные a, столько раз, что они покроют отрезок b».

Неевклидова геометрия

В течение двух тысяч лет никто не сомневался (и не сомневается по сей день) в ценности аксиоматики Евклида. Единственный вопрос, к которому постоянно возвращались как профессиональные математики, так и любители, состоял в следующем: «Нельзя ли доказать, вывести пятый постулат Евклида из остальных аксиом как некоторую теорему». По этому вопросу были написаны тысячи книг и статей, но лучшее, что удавалось сделать, это заменить аксиому о параллельности другим утверждением, которое казалось гораздо более очевидным (и потому часто упускалось из виду), но которое оказывалось совершенно равносильным пятому постулату.

К середине XIX в. стало ясно, что пятый постулат независим от остальной аксиоматики Евклида в том замечательном смысле, что, добавив к этой остальной системе аксиому, отрицающую пятый постулат (например, в такой форме, что через всякую точку проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной), мы получим новую, *непротиворечивую*, систему, в которой можно выделить столь же далекие и содержательные теоремы, как те, которые были получены в геометрии Евклида.

Такая система, в которой выполняется указанный список аксиом (включая отрицание пятого постулата), стала называться «неевклидовой геометрией». Впервые такую систему четко описал замечательный русский математик Н. И. Лобачевский, который выступил с докладом в Казанском университете в 1826 г., а через четыре года подробно из-

Николай Иванович
Лобачевский
(1792—1856)

Русский математик; автор «Геометрических исследований по теории параллельных линий», переведенных на немецкий язык, создатель «неевклидовой геометрии» (геометрия Лобачевского). Его назвали «Коперником в геометрии», так как он полностью перевернул всю сложившуюся систему взглядов на геометрию.

Для развития математики оказались важными не только конкретные теоремы, доказанные Лобачевским, но в значительно большей степени его подход к основаниям науки. Близкие результаты были получены и К.Гауссом, но ему не хватило смелости довести их до конца и опубликовать, но хватило научной честности представить Лобачевского к избранию членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества и лично известить его об избрании.

ложил свою теорию. Независимо от Лобачевского в 1832 г. венгерский математик Я.Бойаи опубликовал работу с аналогичным содержанием. Еще через 40 лет были построены примеры поверхностей, на которых выполняется геометрия Лобачевского.

От геометрии к логике

Смысл движения от Евклида к Лобачевскому и далее — к Гильберту (или, по крайней мере, один из этих смыслов) состоит в освобождении от геометрической наглядности. В системе Гильберта не нужно знать, как «выглядят» точки и прямые. С ними можно (и нужно) обращаться как с объектами, о которых известно лишь то, что описано в аксиомах. Тем самым, исходя из аксиом, мы получаем новые результаты лишь с помощью логики. Такой взгляд порождает два новых вопроса. Прежде всего о самой геометрии. Получение в качестве следствий аксиом большого числа достаточно глубоких утверждений (как это, например, было сделано Лобачевским) само по себе не доказывает непротиворечивости построенной системы. Уже к концу XIX в. стало ясно, что доказывать непротиворечивость новых систем можно с помощью *моделей*, реализующих аксиомы системы. Так, Гильберт указывает модель построения евклидовой геометрии с помощью чисел. Другой вопрос связан с анализом самой логики, что и было предпринято с большой интенсивностью в XX в.

ГЛАВА 4 Комбинаторика

Занятие 1
Комбинаторные конструкции

Азбука Морзе

Алфавит состоит из двух символов: точка • и тире —.

Построение слов

Слова длины 1

•	—

Слова длины 2

••	•—
—•	——

Слова длины 3

•••	••—	•—•	•——
———	——•	—•—	—••

Каждая буква алфавита может быть использована один раз, несколько раз или ни разу

a						

a	*a*	*a*	*a*			

Какие построения (конструкции) чаще всего используются в комбинаторике?

1. *Построение слов.* Рассмотрим некоторое множество символов. Эти символы будем называть *буквами*, а все множество букв — *алфавитом.*

> *Слово* — это последовательность букв данного алфавита.

Длина слова — число букв в данном слове.

Задача 1. Подсчитать количество слов длины k в алфавите из n букв.

В слове длины k имеется k мест. На первое место ставим любую из n букв. При заполнении очередного места число возможностей увеличивается в n раз.

Ответ: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ раз}} = n^k$. Число слов длины k в алфавите из n букв равно n^k.

2. *Размещение.* Рассмотрим некоторое множество *объектов.* Приготовим *ряд* из пустых *мест.* Мы различаем порядок мест — первое, второе и т. д. Заполнить ряд — значит поместить на каждом его месте какой-либо объект из данного множества (каждый объект можно использовать лишь один раз).

Ряд, заполненный объектами данного множества, называют *размещением* (мы *размещаем* объекты на определенных местах).

Пусть число объектов в множестве равно n, а длина ряда (число мест в нем) равна k.

Задача 2. Подсчитать число A_n^k размещений n объектов на k местах.

В отличие от задачи 1, где букву можно использовать не один раз, в данной задаче, поместив какой-либо объект на определенное место, мы забираем его из множества (мешка с объектами) и его больше у нас нет (вторично он появиться не может).

На первое место ставим любой из n объектов. На каждом следующем шаге число возможностей уменьшается на единицу.

Ответ: $\underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots}_{k \text{ множителей}} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Обратите внимание: последний множитель равен $n-(k-1)=n-k+1$.

Заметим, что если $k>n$, то один из множителей будет равен нулю, поскольку нельзя n объектами занять число мест, большее, чем n.

3. *Перестановка*. Рассмотрим множество, содержащее n объектов. Мы хотим их расставить по порядку, т.е. *упорядочить*. Это можно сделать, занумеровав объекты. Упорядоченный набор объектов называется *перестановкой*. Этот термин возник потому, что сначала брались объекты, каким-то образом расставленные, а другие способы упорядочения требовали переставить эти объекты.

Задача 3. Подсчитать число P_n перестановок n объектов.

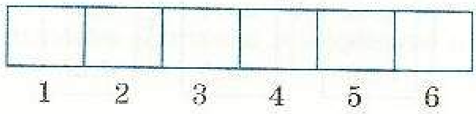
Ясно, что эта задача совпадает с задачей о размещениях в том случае, когда число объектов совпадает с числом мест — мы расставляем все n объектов, используя n имеющихся мест.

Повторение рассуждения задачи 2 приводит к следующему ответу: $n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$. Так как число множителей равно n, то последним будет число 1. Удобно переставить множители и записать результат в виде произведения всех натуральных чисел от 1 до n: $1\cdot2\cdot\ldots\cdot n = n!$ (читается «n факториал»).

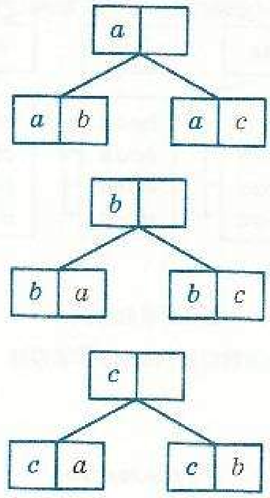
Двухбуквенные слова в алфавите из трех букв

aa	*ab*	*ac*
ba	*bb*	*bc*
ca	*cb*	*cc*

Размещение



Размещение трех объектов на двух местах



Размещение n объектов на k местах

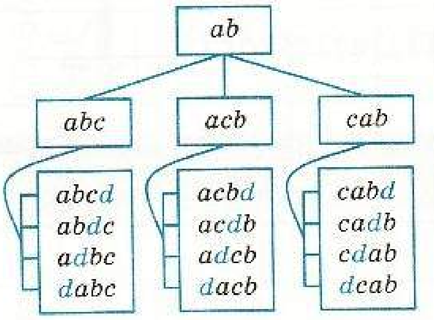
Номера мест	Число возможных размещений
1	n
2	$n-1$
3	$n-2$
...	...
k	$n-k+1$

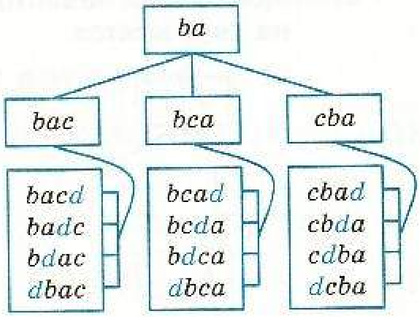
Всего вариантов:

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$

Число размещений n объектов на k местах равно произведению k последовательных целых чисел, наибольшее из которых равно n.

Дерево перестановок





Примеры

Перестановка

$P_n = n!$

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Размещение

$$A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Анаграмма

— слово с переставленными буквами

Как использовать построенные конструкции для решения комбинаторных задач?

Главный принцип — не пытаться применить готовую формулу, не выяснять, «на что» дана задача (размещения, перестановки). Следует проанализировать конструкцию, способ составления и перечисления вариантов.

1. *Двоичные ответы.* Человеку задают 10 вопросов. На каждый из них он отвечает *«да»* или *«нет»*. Сколько имеется различных вариантов ответов на все 10 вопросов?

Для ответа на первый вопрос есть 2 варианта. Если уже построены ответы на несколько вопросов, то ответ на следующий удвоит число вариантов.

Ответ: $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{10} = 1\,024$. Разумеется, в этой задаче встретилась конструкция построения слов в алфавите из двух букв.

2. *Тесты с выбором ответа.* Человеку предложили тест из 6 вопросов. На каждый вопрос надо дать один из предложенных 5 вариантов ответа. Сколько имеется различных ответов на все 6 вопросов теста?

Для ответа на первый вопрос есть 5 вариантов ответа. При переходе к очередному вопросу число вариантов будет увеличиваться в 5 раз.

Ответ: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$. Конструкция сохранилась. Изменилось число букв в алфавите — теперь их стало 5.

3. *Слова с различными буквами.* В алфавите 10 букв. Сколько можно построить слов длиной 3 с неповторяющимися буквами?

На первое место ставим любую из 10 букв, на второе — любую, кроме той, которая уже взята первой. Получаем $10 \cdot 9$ вариантов. На третье место можно поставить любую из 8 неиспользованных букв.

Ответ: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Использована конструкция размещений — на трех местах размещали (без повторений) 10 букв.

4. *Анаграммы слова с различными буквами.* Сколько существует анаграмм для слова КАТЕР?

Все пять букв этого слова разные. Переставить 5 букв можно 5! способами.

Ответ: $P_5 = 5! = 120$.

Вопросы и упражнения

1. Что понимается под словом в данном алфавите?
2. Сколько имеется слов длиной 5 в алфавите из 6 букв?
3. Имеется алфавит из n букв. Рассматриваются слова, состоящие из m неповторяющихся букв. Какое понятие комбинаторики нужно использовать для описания таких слов?
4. Сколько имеется слов длиной 3 с неповторяющимися буквами в алфавите из 6 букв?
5. Что такое перестановка?
6. Сколько существует перестановок из 6 букв?
7. Как связаны между собой понятия «размещение» и «перестановка»?
8. Во сколько раз число размещений 10 объектов на четырех местах меньше числа размещений тех же объектов на шести местах?

Занятие 2
Правила комбинаторики

Каковы основные правила комбинаторных подсчетов?

1. *Правило сложения.* Пусть в множестве A имеется m элементов, а в множестве B — n элементов. Если у множеств A и B нет общих элементов, то в их объединении число элементов равно $m + n$.

Можно сказать так: если в двух мешках лежат разные предметы и мы ссыпаем их вместе, то чтобы найти их общее количество, надо сложить количество предметов в каждом из мешков.

Если для конечного множества X через $|X|$ обозначить количество его элементов, то правило сложения можно записать так: если $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

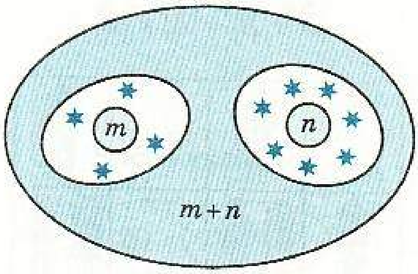
Это правило несложно обобщается на случай, когда у множеств A и B есть общая часть.

2. *Правило включения — исключения.* Пусть у множеств A и B общая часть насчитывает k элементов. Тогда в объединении множеств A и B число элементов равно $m + n - k$, т. е. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Понятно, что, складывая числа m и n, мы засчитываем общие элементы дважды.

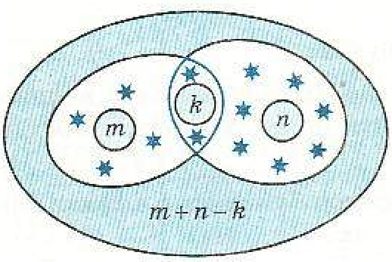
Правила комбинаторики

Правило сложения

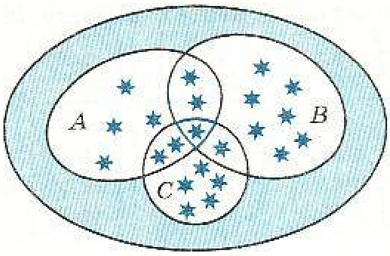


$$A \cap B = \varnothing$$
$$\Downarrow$$
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Правило включения — исключения



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A + B + C| = |A| + |B| + |C| - \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ + |A \cap B \cap C|$$

Правило умножения

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

A \ B	1	…	n
1	1 1	…	1 n
2	2 1	…	2 n
3	3 1	…	3 n
…	…	…	…
n	n 1	…	n n

Правило включения — исключения распространяют на объединение произвольного числа множеств.

3. *Правило умножения.* Число пар, составленных из элементов множеств A и B, равно произведению элементов этих множеств.

Множество пар элементов двух множеств часто обозначают с помощью знака произведения. Тогда правило умножения можно записать так: $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Правило умножения легко пояснить с помощью таблицы. Если мы составим прямоугольную таблицу и занумеруем (обозначим) ее строчки элементами множества A, а столбцы — элементами множества B, то клетки таблицы будут соответствовать парам $(a; b)$, где $a \in A$, $b \in B$. Число клеток таблицы, очевидно, равно произведению числа строк и числа столбцов.

Как применяются правила комбинаторики при решении задач?

1. *Число слагаемых.* Рассмотрим произведение $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

Сколько одночленов (до приведения подобных) получится при умножении «скобки на скобку»?

Этот же вопрос можно переформулировать так: «Сколько пар можно составить из одночленов в первой и второй скобках?» Выберем любой из трех одночленов в первой скобке и любой из шести — во второй. Число пар равно $3 \cdot 6 = 18$ — использовали правило умножения.

2. *Меню.* В меню указано 5 закусок, 3 первых блюда, 4 вторых и 3 десерта. Каким числом способов можно заказать обед из четырех блюд?

При продумывании заказа составляем четверки названий:

1) закуска;
2) первое блюдо;
3) второе блюдо;
4) десерт.

В первую строчку этой четверки вписываем любой из пяти данных вариантов, во вторую — любой из трех и т. д. Общее число вариантов будет равно произведению $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 180$. Это пример на обобщение правила умножения. Мы составляем не только пары, но и наборы из двух, трех, четырех и более объектов.

3. *Автомобильные номера.* Автомобильный номер состоит из трех букв и трех цифр. Используется 20 букв и все 10 цифр. Номер, имеющий все 3 нуля, также допустим (например, А000АА). Сколько можно изготовить таких номеров?

У номера 6 мест. Первое, пятое и шестое предназначены для букв, второе, третье, четвертое — для цифр. Заполнение мест происходит независимо друг от друга.

Ответ: $20 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 20 = 8 \cdot 10^6$.

4. *Число слов.* В алфавите 4 буквы. Сколько можно составить слов из букв этого алфавита, имеющих не более 3 букв?

Число слов длины k из алфавита в 4 буквы равно 4^k. Множества слов разной длины не имеют общих элементов. Применяем правило сложения.

Ответ: $4 + 4^2 + 4^3 = 4 + 16 + 64 = 84$.

5. *Число учеников.* В классе каждый ученик изучает какой-нибудь язык. При этом 20 учеников изучают английский, 12 — французский, а 7 учеников — оба языка. Сколько учеников в классе?

Если сложить количество учеников, изучающих английский и французский языки, то мы учтем всех учеников, но тех, которые изучают два языка, засчитаем дважды. Применяем правило включения — исключения.

Ответ: $20 + 12 - 7 = 25$.

6. *«Хотя бы один раз».* Два раза подряд бросают игральную кость. В каком числе случаев хотя бы один раз выпадет цифра 6?

Все случаи разобьем на два класса: *ни разу* не выпадает цифра 6, *хоть раз* выпадает цифра 6. Общих элементов у этих классов нет. Всего возможных вариантов, т.е. число последовательностей из двух цифр при запасе в 6 цифр, равно 6^2, при запасе в 5 цифр (все, кроме шестерки) равно 5^2. Применяем правило сложения: $6^2 = 5^2 + x$.

Ответ: $6^2 - 5^2 = 11$.

Меню

Блюдо	Количество блюд
Закуска	5
Первое	3
Второе	4
Десерт	3

Число вариантов обеда из четырех блюд:

$5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 180.$

Автомобильные номера

А000АА

Количество номеров:

$20 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 20 = 8 \cdot 10^6.$

Число слов

Количество букв в алфавите — 4

Длина слова — k

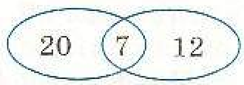
Число слов — 4^k

$k = 3 \Rightarrow$

по правилу сложения:

$4 + 4^2 + 4^3 = 84$

Число учеников



Число учеников в классе:

$20 + 12 - 7 = 25$

«Хотя бы один раз»

Класс 1: *ни разу* не выпадает цифра 6.

Класс 2: *хотя бы один раз* выпадает цифра 6.

Вопросы и упражнения

1. Как определить суммарное число элементов в двух множествах, если известно число элементов в каждом множестве, причем часть элементов может быть общей?
2. В чем состоит правило умножения?
3. В тестовом задании четыре примера. На каждый пример предложено 5 ответов. Каким числом способов можно выбрать ответ на задание?
4. Игральная кость бросается два раза подряд. Для каждой возможной суммы выпавших очков подсчитайте число возможных вариантов. Проверьте: сложив варианты для каждой возможной суммы, вы должны получить общее число вариантов.

Занятие 3
Число орбит

Орбита

— множество одинаковых (равноценных) вариантов

Размещения A_k^m

— размещение без повторений из k элементов по m элементов

Примеры

- рассадить 6 человек в ряд можно 6! (720) способами;
- рассадить 6 человек за круглый стол можно 5! (120) способами;
- составить колонну из пар «мальчик—девочка» при наличии 5 мальчиков и 5 девочек можно $5!5!2^5$ способами.

Как при комбинаторных подсчетах учитываются комбинации, которые считаются одинаковыми?

При подсчете числа вариантов часто приходится считать одинаковыми (*отождествлять*) варианты по некоторому признаку. Если объединить все варианты, которые считаются одинаковыми, то получим множество, которое называют *орбитой*.

1. *Круглый стол*. Посадим 6 человек в ряд. Это можно сделать 6! способами. Теперь посадим их за круглый стол. Будем считать одинаковыми способы расстановки людей, которые можно получить поворотом стола по кругу.

Возьмем одну расстановку и будем поворачивать стол. Мы получим орбиту из шести расстановок. Общее число орбит будет в 6 раз меньше, чем число всех расстановок.

Ответ: $\dfrac{6!}{6} = 5! = 120$.

2. *Число пар*. Имеется 5 мальчиков и 5 девочек. Каким числом способов их можно расставить в колонну, составленную из пар «мальчик — девочка»?

Будем считать одинаковыми колонны, в которых мальчик стоит слева или справа. Тогда общее число способов можно подсчитать следующим образом: выбор ряда для мальчиков — 5! способов; выбор ряда для девочек — 5! способов.

Возьмем одну расстановку в пары и начнем менять в парах левую и правую позиции. Из одной расстановки получим $2^5 = 32$ других (меняем позиции в каждой паре независимо друг от друга). Объединив варианты в орбиты и заметив, что число элементов в каждой орбите одно и то же, равное 32, получаем результат.

Ответ: $\frac{1}{32}\cdot(5!)^2\cdot 32 = \frac{120\cdot 120\cdot 32}{32} = 24\,400.$

3. *Число сочетаний*. Каким числом способов можно выбрать подмножество (неупорядоченное!) из k элементов из множества, содержащего n элементов?

Если бы мы рассаживали людей на k мест по порядку, то получили бы ответ в виде $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ — число размещений.

Объединим расстановки в орбиты, меняя местами (переставляя) выбранных k человек. Это можно сделать $k!$ способами. Число орбит будет равно $\frac{n\ (n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

Мы получили выборку элементов, в которой порядок элементов не имеет значения. Раньше подмножества называли *сочетаниями*, поэтому полученное число называют «числом сочетаний из n по k» и обозначают C_n^k.

Принято также обозначение

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Свойство сочетаний

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$$

4. *Число анаграмм*. Мы подсчитали ранее число анаграмм слова с различными буквами. Если число букв в слове равно n, то это число равно числу перестановок n элементов, т.е. числу $n!$.

Пример

Число подгрупп

Каким числом способов можно выбрать подгруппу из трех человек из группы в шесть человек?

Сначала подготовим три места и посадим в них трех человек по порядку.

Это можно сделать $6\cdot 5\cdot 4 = 120$ способами.

Теперь объединим в одну орбиту расстановки, не отличающиеся составом тройки, но различающиеся лишь тем, в каком порядке они посажены.

В каждой орбите будет по $3! = 6$ расстановок.

Ответ: $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = \frac{120}{6} = 20.$

Пример

Число сочетаний

Дано множество элементов:

$$x = \{1, 2, 3\}.$$

Необходимо из данного множества составить двухэлементные подмножества.

Их будет три: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. Из элементов каждого подмножества можно образовать 2! орбит длины 2:

$$(1, 2)\ (1, 3)\ (2, 3)$$
$$(2, 1)\ (3, 1)\ (3, 2),$$

которые являются размещениями без повторения из трех элементов по два, и их число равно $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$. С другой стороны, это число равно $2!C_3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_3^2 = 2!C_3^2 \Rightarrow C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!}$.

Пример

Число сочетаний

На прямой взяли десять точек.

Сколько всего получилось отрезков, концами которых являются эти точки?

$$C_{10}^2 = \frac{A_{10}^2}{2!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = a^n(1 + x)^n$$

(вынесли a^n за скобку и обозначили b/a через x)

Рассмотрим разложение бинома $(1 + x)^n$ по степеням x:

$$(1 + x)^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Коэффициенты a_k задаются формулой

$$a_k = C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Мы умножаем n скобок вида $1 + x$ друг на друга. Чтобы получить степень x^k, нужно выбрать в k из них x, а в остальных $n - k$ — единицу. Число вариантов выбора k объектов из n возможных — это и есть определенное нами число сочетаний из n по k, т.е. число C_n^k. Для удобства полагают $C_n^0 = 1$ и записывают формулу бинома так:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n.$$

Теперь рассмотрим случай, когда в слове есть одинаковые буквы. Например, найдем число анаграмм слова *ОКОЛОТОК*.

Это слово из восьми букв, причем в нем 4 раза встречается буква *О*, два раза — *К*, а буквы *Л* и *Т* по одному разу. Сделаем одинаковые буквы разными (например, напишем их разным шрифтом — *К* и К). Теперь все 8 букв разные и число анаграмм этого слова равно 8!. Объединим их в орбиты, отождествляя одинаковые, но по-разному записанные буквы *О* и *К*. Переставляя разные написания букв *О* (4! способа) и *К* (2! способа), получим орбиту из $4! \cdot 2! = 48$ слов. Чтобы получить число анаграмм исходного слова, нужно 8! разделить на длину орбиты.

Ответ: $\frac{8!}{4!2!} = 840.$

Как возводить в степень сумму одночленов?

1. *Формула бинома Ньютона.* Словосочетание «бином Ньютона» давно стало символом трудности и непонятности математики. На самом деле идет речь о достаточно простой вещи: если взять двучлен (бином) $a + b$, возвести его в степень и сложить подобные слагаемые, то получится сумма одночленов вида a^kb^l с некоторыми коэффициентами. Формулу вычисления этих коэффициентов связывают с именем И.Ньютона, хотя она использовалась гораздо раньше.

При возведении в степень бинома $a + b$ получаем формулу: $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_{n-1}^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$.

Частные случаи этой формулы при $n = 2$, 3, 4 вам хорошо знакомы.

Числа C_n^k называют *биномиальными коэффициентами*.

2. *Свойства биномиальных коэффициентов.*

1) *Частные случаи.* Полезно запомнить первые коэффициенты: $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

2) *Запись через факториалы.* Формулу $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ можно преобразовать к более симметричному виду, домножив числитель и знаменатель на $(n-k)!$. В числителе восстановятся все числа от 1 до n. Получится формула $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

3) *Симметрия.* Равноотстоящие от концов биномиальные коэффициенты равны между собой: $C_n^k = C_n^{n-k}$. Это очевидно из предыдущей формулы.

Симметрией пользуются для вычисления биномиальных коэффициентов C_n^k с большими k: $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$, $C_n^{n-2} = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и т. п.

Чтобы выбрать k элементов из множества в n элементов, можно указать те из них, которые останутся, не будут выбраны. Если мы выбираем k элементов, то остается $n-k$. Поэтому число выборок по k элементов (из n) равно числу выборок по $n-k$ элементов.

4) *Сумма биномиальных коэффициентов*

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Для доказательства можно положить в разложении $(1+x)^n$ вместо x единицу: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$. Эту же формулу можно получить из других соображений. Подсчитаем двумя способами общее возможное число выборок из множества, содержащего n элементов (число всех подмножеств n-элементного множества).

С одной стороны, это число равно 2^n — для каждого элемента есть две возможности, попасть или не попасть в выбираемое подмножество, причем для каждого элемента эти возможности выбираются независимо друг от друга. Это же число можно получить иначе — сначала зафиксировать число k элементов в подмножестве. Получим число C_n^k, а затем сложим по всем k, чтобы найти общее число вариантов.

3. *Рекуррентные соотношения.*

1) Представим себе, что к n элементам данного множества мы добавили еще один и из

Биномиальные коэффициенты

$\boxed{C_n^k}$

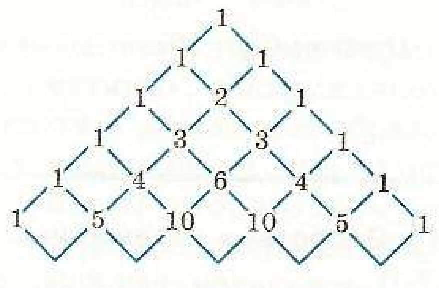
Свойства биномиальных коэффициентов

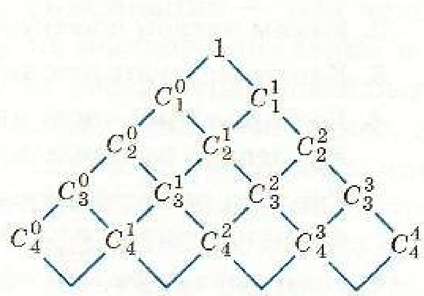
- $C_n^k = C_n^{n-k}$ — симметрия
- $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ — сумма

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \\ \bullet\ C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \\ \bullet\ C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n} \end{array}\right\}\ \text{рекуррентные соотношения}$$

Треугольник Паскаля

Биномиальные коэффициенты можно находить с помощью известного треугольника Паскаля:





Пример

Возьмем 10 объектов одного сорта, например кружков.

Поставим их в ряд и поместим между ними две перегородки:

○○○|○○○○|○○○

Перегородки разделят число 10 на 3 слагаемых:

$$10 = 3 + 4 + 3.$$

Перегородки могут стоять рядом, тогда слагаемые будут нулями:

○○○||○○○○○○○

$$10 = 3 + 0 + 7;$$

○○○○○○○○○○||

$$10 = 10 + 0 + 0.$$

Теперь у нас 12 мест и мы должны указать два из них, где будут стоять перегородки.

Это можно сделать числом способов, равным

$$C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Формулу легко обобщить: для разбиения числа n на k слагаемых понадобится $k - 1$ перегородка, т.е.

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}.$$

Ответ: $C_{12}^2 = 66$.

полученного множества хотим выбрать подмножество из $k + 1$ элемента. По определению это число равно C_{n+1}^{k+1}. Все эти выборки разобьем на два сорта — те, которые содержат один добавленный элемент, и те, которые его не содержат. Первых будет C_n^k штук (один элемент уже взят, а из остальных надо взять еще k), а вторых — C_n^{k+1} (все $k + 1$ элементов берутся из исходного множества).

Тем самым $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

2) Решим двумя способами следующую задачу: из группы в n человек надо выбрать команду в k человек и среди них назначить капитана команды.

Сначала можно выбрать всю команду (число способов C_n^k) и из нее выбрать капитана (k способов). Всего получится kC_n^k способов.

Можно сначала из всей группы выбрать капитана (n способов), а затем из оставшихся выбрать $k - 1$ рядовых членов команды $\left(C_{n-1}^{k-1}\right)$ — всего nC_{n-1}^{k-1} способов.

Результат: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, т.е. $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.

4. *Число одночленов данной конструкции.* Как подсчитать число одночленов 10-й степени с тремя буквами a, b и c?

Каждый такой одночлен имеет вид $a^k b^l c^m$, где $k + l + m = 10$. Эта задача равносильна такой: каким числом способов можно представить число 10 в виде упорядоченной суммы трех неотрицательных целых чисел:

$$10 = 10 + 0 + 0 = 9 + 1 + 0 = 9 + 0 + 1 =$$
$$= 8 + 2 + 0 = 8 + 0 + 2 = 8 + 1 + 1 = \ldots \text{ и т.д.}$$

? Вопросы и упражнения

1. Каким числом способов можно выбрать двух человек из ста?
2. Каким числом способов можно выбрать 98 человек из 100?
3. Какие формулы для вычисления числа сочетаний вы знаете?
4. Во сколько раз число анаграмм слова *АНАГРАММА* меньше числа перестановок девяти различных букв?
5. Сколько раз встретится одночлен a^3b^7 при возведении $a + b$ в десятую степень без приведения подобных членов?
6. Чему равна сумма коэффициентов в разложении $(a + b)^9$?

7. Чему равна сумма коэффициентов в разложении $(2a + b)^9$?

8. Каков самый большой коэффициент в разложении $(a + b)^7$?

9. Каким числом способов можно разложить 10 одинаковых монет в 3 кармана?

10. Каким числом способов можно разложить 10 разных монет в 3 кармана?

БЕСЕДА

Из истории комбинаторики

Самая древняя игральная кость, т.е. кубик с нанесенными на грани шестью различными знаками, была найдена при раскопках в северном Ираке. Ее возраст составил около 5 тыс. лет. Комбинации, возникающие при бросании игральной кости и в других играх, всегда привлекали людей, никак не связанных с математикой, потому что наименование нашего вида, homo sapiens (человек мыслящий), уже давно (по мере разочарования в мыслительных способностях человека) стало ставиться рядом с наименованиями homo faber (человек делающий) и homo ludens (человек играющий).

Различные игры (например, кости, карты, лото, домино) ставят перед человеком вопросы, требующие тщательного анализа и применения серьезной математической техники. Постепенно выяснилось, что аналогичные вопросы возникают не только в играх, но и в самых разнообразных и внешне далеких друг от друга сферах человеческой деятельности — экономике и планировании, лингвистике и криптографии, теории стрельбы и организации движения транспорта. С помощью комбинаторики и тесно связанных с ней таких разделов математики, как статистика и теория вероятностей, удалось найти строгие закономерности там, где их не должно было бы быть по самому смыслу — в мире случайных явлений, среди хаоса и беспорядка.

Среди родоначальников комбинаторики и теории вероятностей надо назвать знакомые имена — Б. Паскаля и П. Ферма, Я. Бернулли и П. Лапласа и, разумеется, Л. Эйлера.

Согласно легенде, 29 июля 1654 г. Паскаль написал письмо Ферма, в котором рассказал о «скандале в доме математики», обнаруженном французским аристократом, страстным игроком и достаточно образованным человеком де Мере. Вопрос состоял в следующем. Сколько раз надо подряд бросить игральную кость, чтобы шансы того, что хоть раз выпадет шестерка, превысили половину? На этот легкий вопрос де Мере знал правильный ответ — четыре. (Как само собой разумеющееся, Паскаль в письме к Ферма называет количество комбинаций — при четырех бросаниях кости в 625 случаях ни разу не выпадет шестерка и в 671 случае она выпадет хотя бы один раз.) Более распространенной была игра с одновременным бросанием пары костей. Как нечто очевидное, де Мере считал, что отношение 4 : 6 (числа необходимых бросаний к числу возможных исходов) сохранится и при бросании пары костей. Общее число исходов в этом случае равно $6^2 = 36$ и, следовательно, нужно произвести 24 бросания пары костей (24 : 36 = 4 : 6), чтобы шансы на выпадение двух шестерок превысили половину. Однако его опыт игрока свидетельствовал о том, что это не так и необходимо не 24, а 25 бросаний.

Эта задача де Мере (а он является автором еще нескольких важных и более трудных вопросов) будет нам вполне по силам. Общее число комбинаций сейчас уже велико, но точные вычисления Паскаля показали, что доля успешных вариантов при 24 бросаниях равна приблизительно 0,4914 и лишь при 25 бросаниях чуть превосходит половину — 0,5055. Надо было долго играть в кости, чтобы почувствовать разницу между этими двумя дробями.

Несмотря на то что комбинаторика является столь древним разделом математики, в школе ее изучали мало. Произошедший в последние десятилетия взрыв интереса к комбинаторике во многом объясняется наступлением компьютерной эры и повышением роли так называемой дискретной математики, имеющей дело прежде всего с конечными множествами. Нашей задачей является ознакомление с методами комбинаторики, которые позволят выработать общие принципы решения различных интересных задач и подготовиться к восприятию идей теории вероятностей.

ГЛАВА 5

Координаты и векторы

Занятие 1
Повторение пройденного

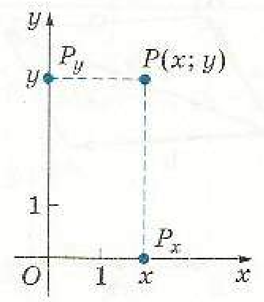
Что нам известно о координатах и векторах на плоскости?

1. *Декартова система координат на плоскости.* Проведем на плоскости две взаимно-перпендикулярные *координатные прямые* с общим началом O. На каждой из этих прямых выбрано направление и указан масштаб. Обозначим построенные оси Ox и Oy. Точки на осях определяются своими координатами. Возьмем произвольную точку P на плоскости и спроектируем ее на оси координат. Получим точки P_x и P_y с координатами на осях x и y соответственно. Пара чисел $(x; y)$ называется координатами точки P в построенной системе координат.

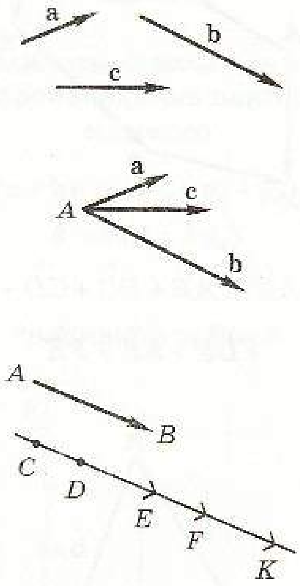
2. *Векторы на плоскости.* Вектор на плоскости изображается направленным отрезком и обозначается либо **a**, либо $\overrightarrow{AB}$, где A — начало вектора; B — его конец. При этом соблюдаются следующие правила:

- *однородность.* От любой точки можно отложить направленный отрезок, изображающий данный вектор, или иначе: вектор можно отложить от любой точки;
- *условие равенства.* Направленные отрезки изображают один и тот же вектор в том и только в том случае, когда отрезки равны по длине, параллельны и одинаково направлены;
- *правило трех точек.* Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображает вектор **a**, отрезок $\overrightarrow{BC}$ — вектор **b**,

Координаты

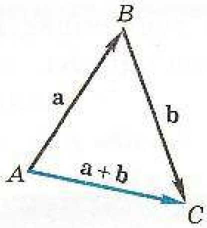


Векторы



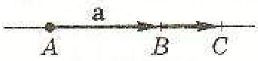
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EK}$$

то отрезок $\vec{AC}$ изображает сумму векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

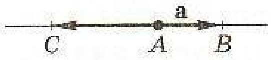


• *растяжение.* Если отрезок $\vec{AB}$ изображает вектор $\mathbf{a}$, то вектор $\lambda\mathbf{a}$ можно изобразить как отрезок $\vec{AC}$, лежащий на прямой AB, длиной $|AC| = |\lambda||AB|$ и с направлением, совпадающим с направлением отрезка AB, если $\lambda > 0$, и противоположным ему, если $\lambda < 0$;

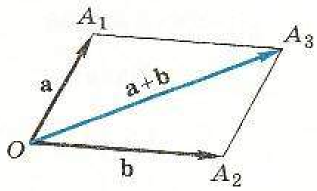
$\vec{AC} = \lambda \cdot \mathbf{a}, \lambda > 0$



$\vec{AC} = \lambda \cdot \mathbf{a}, \lambda < 0$



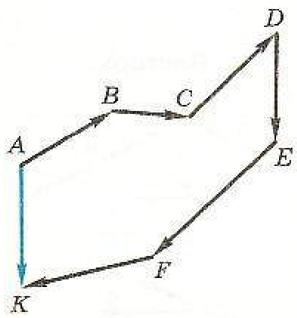
• *правило параллелограмма.* Пусть $\vec{OA_1} = \mathbf{a}$ и $\vec{OA_2} = \mathbf{b}$. Тогда диагональ $\vec{OA_3}$ параллелограмма $OA_1A_3A_2$ со сторонами OA_1 и OA_2 изображает сумму векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;



• *изображение противоположного вектора.* Пусть $\vec{AB} = \mathbf{a}$ и точка C симметрична B относительно A. Тогда отрезок $\vec{AC} = \vec{BA}$ изображает вектор $-\mathbf{a}$, противоположный вектору $\mathbf{a}$;

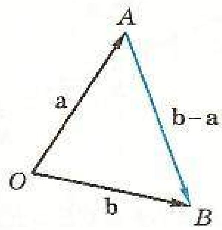
• *изображение нулевого вектора.* Нулевой вектор $\mathbf{0}$ изображается точкой, т. е. отрезком, у которого начало и конец совпадают;

• *правило многоугольника.* Если несколько векторов изображены так, что начало второго есть конец первого, начало третьего — конец второго и так далее, то отрезок, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, изображает сумму этих векторов;



$$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FK}$$

• *изображение разности.* Если два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ отложены от одной точки O: $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, то их разность $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ изображается отрезком $\vec{AB}$, соединяющим концы векторов. Полезно также запомнить, что диагонали параллелограмма изображают векторную сумму и разность сторон параллелограмма.



3. *Связь между координатами и векторами.* Если вектор $\mathbf{a}$ изображается направленным отрезком $\vec{AB}$, а декартовы координаты точек A и B известны, например $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то вектор $\mathbf{a}$ однозначно задается парой чисел $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, т. е. разностями координат конца и начала отрезка $\vec{AB}$.

Пусть $x_a = x_2 - x_1$, $y_a = y_2 - y_1$; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — единичные векторы (орты) координатных осей. Тогда $\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j}$. Это равенство называется разложением вектора **a** по координатным осям, а числа (x_a, y_a) называются координатами вектора **a**.

При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число.

Как с помощью координат можно задавать множества точек на плоскости?

1. *Уравнение прямой*. Общее уравнение прямой имеет вид $ax + by + c = 0$. Прямая, параллельная оси Oy, задается уравнением вида $x = c$. Прямую, не параллельную оси Oy, можно задать уравнением с угловым коэффициентом k: $y = kx + b$.

2. *Уравнение окружности*. Общее уравнение окружности с центром $C(a; b)$ и радиусом R можно задать в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. В частности, единичная окружность с центром в начале координат задается уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

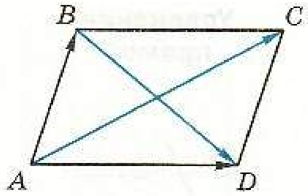
3. *Уравнение произвольной кривой C* можно записать в виде $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — некоторое выражение с буквами (переменными) x и y.

Когда говорят, что некоторое соотношение между координатами есть уравнение кривой C, то это означает, что:

- координаты любой точки кривой C связаны данным уравнением;
- всякая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению, лежит на кривой C.

Как можно использовать координаты и векторы при решении геометрических задач?

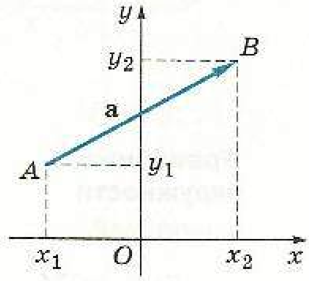
1. *Середина отрезка*. Если дан отрезок A_1A_2 и известны координаты его концов $A_1(a_1; b_1)$ и $A_2(a_2; b_2)$, то координаты точки $B(a; b)$ — середины отрезка A_1A_2 — вычисляются по формулам $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$; $b = \frac{b_1 + b_2}{2}$. В век-



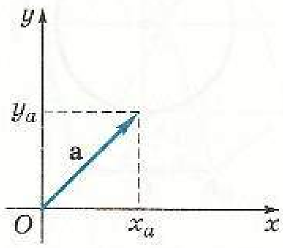
$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$

Связь координат с векторами



$\vec{AB} = \mathbf{a}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$



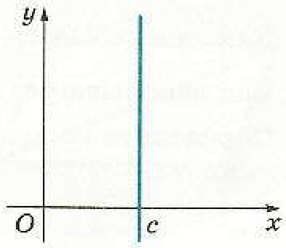
$\mathbf{a}(x_a;\ y_a)$

Координаты суммы векторов и произведения вектора на число

$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(x_a + x_b;\ y_a + y_b)$

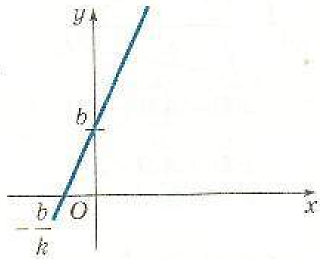
$k \cdot \mathbf{a}(kx_a;\ ky_a)$

Уравнение прямой



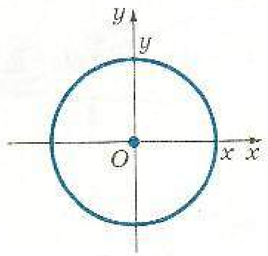
$x = c$

Уравнение прямой



$y = kx + b$

Уравнение окружности



$x^2 + y^2 = 1$

торной форме можно записать соотношение $\vec{OB} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA_1} + \vec{OA_2}\right)$.

2. Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника образуют параллелограмм.

Дан четырехугольник $ABCD$ и отмечены середины его сторон M, N, P, Q. Векторное равенство $\vec{MN} = \vec{QP}$ будет означать, что две противоположные стороны MN и PQ четырехугольника $MNPQ$ равны и параллельны. Этого достаточно для решения задачи. Выразим векторы $\vec{MN}$ и $\vec{QP}$ через векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$:

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{OB} + \vec{OC}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} - \vec{OA}\right);$$

$$\vec{QP} = \vec{OP} - \vec{OQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} + \vec{OD}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} - \vec{OA}\right).$$

Получим, что $\vec{MN} = \vec{QP}$.

Вопросы и упражнения

1. Какие правила изображения векторов на плоскости вам известны?
2. В чем состоит правило параллелограмма?
3. В чем состоит правило многоугольника?
4. Как вычисляются координаты вектора?
5. Какова связь между координатами точек и векторами?
6. Как записывается уравнение прямой?
7. Как записывается уравнение окружности?
8. Как записывается уравнение произвольной кривой?
9. Определите координаты середины отрезка, если известны координаты его концов.

Занятие 2
Координаты и векторы в пространстве

Что меняется при переходе от плоскости к пространству?

1. *Декартова система координат в пространстве.* В пространстве через любую точку O можно провести три взаимно-перпендикулярные прямые. Взяв точку O в качестве общего начала, выбрав на каждой прямой направление и масштаб, мы превратим их в координатные прямые — числовые оси Ox, Oy и Oz.

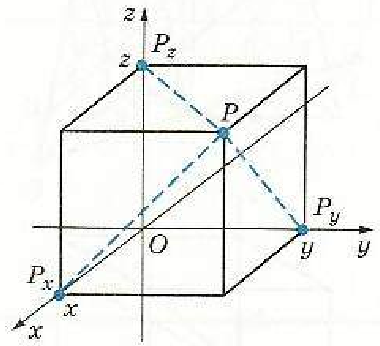
Любую точку P в пространстве можно спроектировать на построенные оси, проведя через нее плоскости, перпендикулярные этим осям. Координаты проекций P_x, P_y и P_z на осях Ox, Oy и Oz составят тройку координат точки $P(x, y, z)$.

2. *Векторы в пространстве.* Так же как и на плоскости, векторы в пространстве изображаются направленными отрезками. К девяти сформулированным в занятии 1 правилам изображения векторов, которые сохраняются и для пространства, полезно добавить еще одно:

Правило параллелепипеда. Если $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OA_3} = \mathbf{c}$, то диагональ $\overrightarrow{OA}$ параллелепипеда со сторонами OA_1, OA_2, OA_3 изображает сумму векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

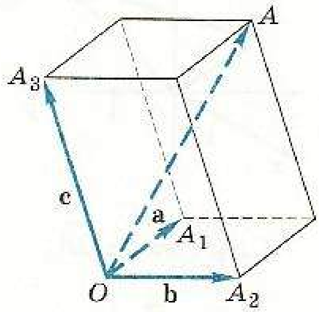
Что же все-таки меняется в исчислении векторов при переходе от плоскости к пространству? Меняются не отдельно взятые векторы, а свойства их совокупности. Возьмем ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$. Любой вектор $\mathbf{b}$, лежащий на прямой AB, можно представить в виде: $\mathbf{b} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$. Такие векторы называются *коллинеарными* (лежащими на одной прямой). Перейдем к плоскости. Возьмем на ней два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Любой вектор $\mathbf{c}$ на этой плоскости можно разложить по этим векторам: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Такие три вектора называются *компланарными* (лежащими в одной плоскости). В пространстве можно найти три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Координаты



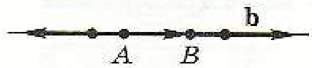
$P(x; y; z)$

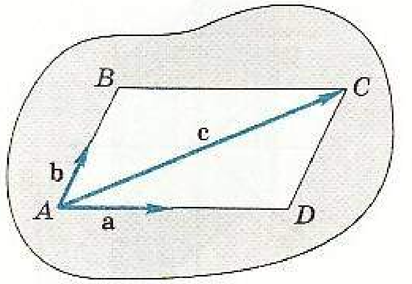
Векторы

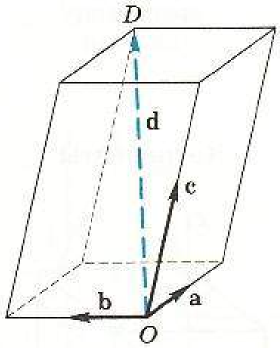


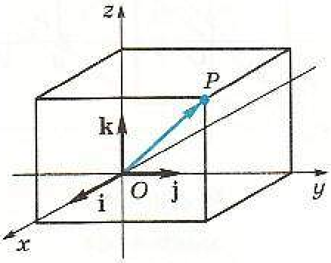
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

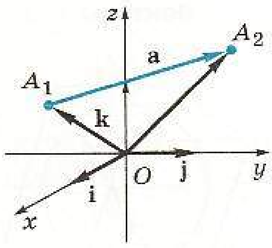
$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$



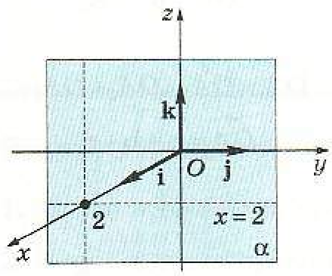




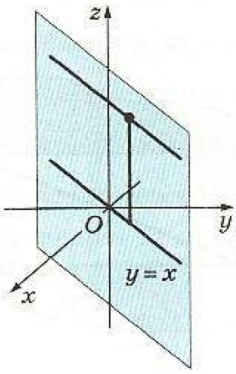




$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$



$\alpha \parallel zOy$



Теперь любой вектор **d** можно разложить по этим векторам: $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

3. *Связь между координатами и векторами.* При переходе к пространству вид связи сохраняется. Теперь выбираем тройку ортов координатных осей **i**, **j**, **k**. Если проекции точки $P(x;\ y;\ z)$ на координатные оси обозначены через P_x, P_y и P_z, то вектор $\overrightarrow{OP}$ равен сумме $\overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} + \overrightarrow{OP_z} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Координаты любого вектора **a**, заданного направленным отрезком $\overrightarrow{A_1A_2}$, можно выразить через координаты его концов $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} =$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Как можно использовать координаты и векторы в пространстве?

1. Какие точки пространства описываются уравнениями вида $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$?

Когда одна координата точки постоянна, а остальные произвольны, точка лежит в плоскости, перпендикулярной той оси, которая соответствует постоянной координате, т. е. эта плоскость параллельна координатной плоскости, где лежат две другие оси.

2. Где в пространстве лежат точки, координаты которых удовлетворяют условию $y = x$?

На координатной плоскости xOy условие $y = x$ задает известную прямую. Все точки пространства, проектирующиеся на эту прямую, будут иметь координаты, связанные этим условием (и только они). Поэтому ответом будет плоскость, перпендикулярная плоскости xOy (или иначе, содержащая ось Oz) и проходящая через прямую $y = x$ этой плоскости.

3. В пространстве даны три точки с координатами $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ -1)$ и $C(-2;\ 4;\ -3)$. Как построить точку D, если четыре точки $ABCD$ (в указанном порядке) образуют параллелограмм?

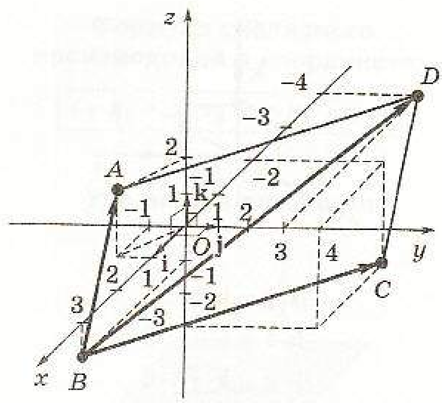
Вершину D можно определить из векторного равенства $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и их суммы:

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k};$$
$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k};$$
$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Обозначим неизвестные координаты точки D через $(x;\ y;\ z)$. Имеем: $\vec{BD} = \vec{OD} - \vec{OB}$.

$$\vec{OD} = \vec{BD} + \vec{OB} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + 3\mathbf{i} - \mathbf{k} =$$
$$= -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Получаем $x = -4;\ y = 3;\ z = 0$.



Вопросы и упражнения

1. В чем состоит правило параллелепипеда?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие векторы называются компланарными?
4. Как вычисляются координаты вектора в пространстве?

Занятие 3
Скалярное произведение

Как вычисляется скалярное произведение векторов?

1. *Формулы.* Известны следующие формулы для вычисления скалярного произведения векторов на плоскости:

- формула через длины и угол: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = |AB| \cdot |CD| \cos\alpha$, где $|AB|$, $|CD|$ — длины отрезков, а α — угол между ними;
- формула в координатах: $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$, где $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ — координаты векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

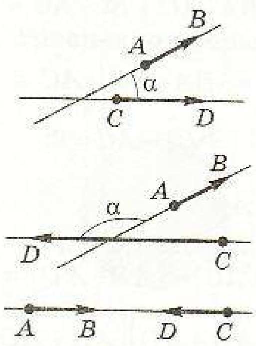
Эти способы вычисления сохраняются и для пространства.

В первой формуле ничего менять не надо, она не зависит от того, где лежат два направленных отрезка $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$.

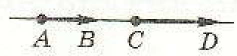
Во второй формуле необходимо учесть третью координату: $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, где $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — пространственные координаты векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

Примеры

$\alpha = (\widehat{\vec{AB};\ \vec{CD}})$

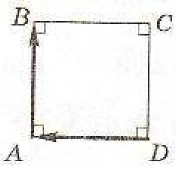


$\alpha = 180^\circ$

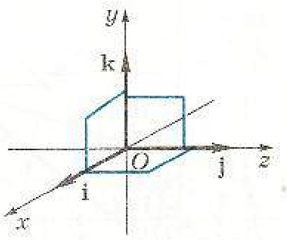


$\alpha = 0^\circ$

$0 \le \alpha \le 180^\circ$



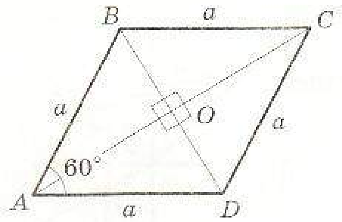
$\vec{AB} \cdot \vec{DA} = 0$



$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$

Пример

$ABCD$ — ромб со стороной a и острым углом 60°.



Вычислите:

1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$
$$=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=$$
$$=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0;$$

2) $|\overrightarrow{AC}|$:

$$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2=$$
$$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+$$
$$+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=a^2+2a^2\times$$
$$\times\frac{1}{2}+a^2=3a^2.$$
$$|\overrightarrow{AC}|=a\sqrt{3}.$$

Ответ: 1) 0; 2) $a\sqrt{3}$.

2. *Ортогональность*. Два вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ называются *ортогональными* (перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю. Обозначение: $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то считаем, что скалярное произведение равно нулю. Если же оба вектора ненулевые, то из первой формулы следует, что косинус угла между ортогональными векторами равен нулю, т.е. сам угол прямой. Это и оправдывает название: направленные отрезки, изображающие два ортогональных вектора, перпендикулярны друг другу.

Заметим, что орты координатных осей $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ попарно ортогональны друг другу.

3. *Свойства скалярного произведения*:

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ — коммутативность;

2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ — дистрибутивный закон;

3) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ — длина вектора;

4) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ — условие ортогональности (перпендикулярности) ненулевых векторов.

Заметим, что из дистрибутивного (распределительного) закона следует формула для скалярного произведения в координатах:

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})\cdot(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}).$$

Выражения в скобках надо перемножить почленно и учесть, что $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, а $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$.

4. *Расстояние*. Расстояние между двумя точками A_1 и A_2 в пространстве можно вычислить с помощью скалярного произведения: $|A_1A_2|^2 = \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}$.

Запишем скалярный квадрат в координатах:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2.$$

Получаем формулу

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2},$$

которая обобщает теорему Пифагора для пространства.

Зачем переводят геометрические понятия на язык координат и векторов?

Это делается для того, чтобы построить вычислительные алгоритмы для решения геометрических задач. Основой для этого являются уравнения различных фигур в пространстве и, прежде всего, уравнения плоскости и сферы (поверхности шара).

1. *Уравнение плоскости.*

Плоскость можно задать одной содержащейся в ней точкой $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и вектором $\mathbf{n}$, перпендикулярным этой плоскости (его называют вектором *нормали* к плоскости). Необходимым и достаточным условием того, что точка $P(x;\ y;\ z)$ принадлежит плоскости, является следующее: $\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}\right)\perp\mathbf{n}$ или в виде равенства $\overrightarrow{PP_0}\cdot\mathbf{n}=0$. Задав координаты нормали $\mathbf{n}(A;\ B;\ C)$, получим уравнение плоскости в координатной форме:

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0.$$

Раскрыв скобки и обозначив число $(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ через D, получим стандартное уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Оно является аналогом известного уравнения прямой на плоскости.

Заметим, что вектор нормали $\mathbf{n}$ определен неоднозначно — его можно умножать на любое число.

2. *Уравнение сферы.*

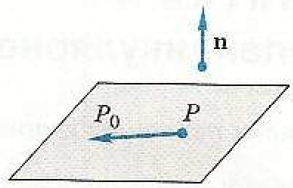
Точка $P(x;\ y;\ z)$ находится на сфере с центром $C(a;\ b;\ c)$ и радиусом R, если выполнено условие $|PC|^2 = R^2$. Это условие легко переписать в координатах: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.

Данное уравнение обобщает уравнение окружности в плоскости.

Формула скалярного произведения в координатах

$$\boxed{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Уравнение плоскости



$$\overrightarrow{PP_0}\perp\mathbf{n}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Составить уравнение плоскости при следующих условиях: $\mathbf{n}(1;\ 2;\ 3)$, $P_0(1;\ 0;\ 0)$.

Решение:

$$\overrightarrow{P_0P}\big((x-1);y;z\big)$$

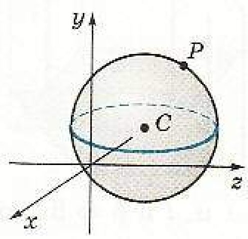
$$\overrightarrow{P_0P}\perp\mathbf{n}$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\mathbf{n}=(x-1)+2y+3z=0.$$

Уравнение плоскости имеет вид:

$$x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

Уравнение сферы



$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2}$$

Вопросы и упражнения

1. Как определяется скалярное произведение векторов?
2. Как вычисляется скалярное произведение в координатах?
3. Каковы основные свойства скалярного произведения?

4. Как вычисляется расстояние между двумя точками в пространстве с помощью координат?

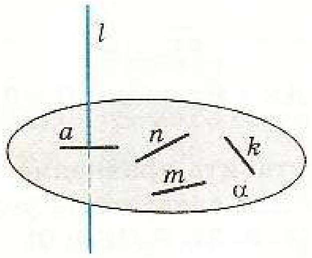
5. Запишите уравнение плоскости.

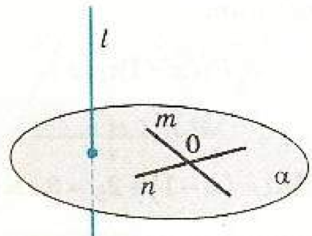
6. Запишите уравнение сферы.

Занятие 4
Перпендикулярность прямых и плоскостей

Признаки перпендикулярности:

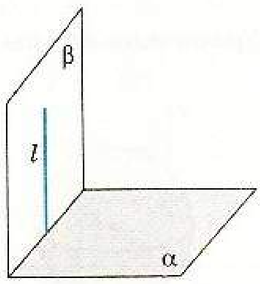
- прямой и плоскости





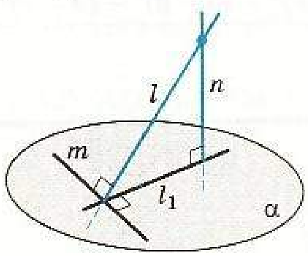
$l \perp m,\ l \perp n,\ m \cap n = \{0\} \Rightarrow l \perp \alpha$

- двух плоскостей



$l \perp \alpha,\ l \in \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$

- двух прямых



$n \perp \alpha,\ m \perp l,$
l_1 — проекция l на $\alpha \Rightarrow l_1 \perp m$

Как можно проверить перпендикулярность прямых и плоскостей, используя координаты и векторы?

1. *Перпендикулярность прямой и плоскости.*

По определению прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Проверить такое утверждение трудно, так как в плоскости можно провести бесконечное множество прямых.

Оказывается, что достаточно проверить перпендикулярность лишь двум пересекающимся прямым.

Теорема (***теорема о двух перпендикулярах***). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым некоторой плоскости, то она перпендикулярна любой другой прямой этой плоскости, а значит, перпендикулярна самой плоскости.

2. *Перпендикулярность двух плоскостей.*

Теорема. Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

3. *Перпендикулярность двух прямых.*

Теорема (***теорема о трех перпендикулярах***). Если прямая, не лежащая в плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то этой прямой перпендикулярна и проекция исходной прямой на плоскость.

Обратно: если проекция прямой на плоскость перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то этой прямой перпендикулярна и исходная прямая.

Почему верны сформулированные признаки перпендикулярности прямых и плоскостей?

Признаки перпендикулярности можно доказывать обычными геометрическими методами, используя различные построения и применяя теоремы планиметрии (например, равенство треугольников). Более простые и короткие доказательства, вскрывающие суть дела, используют векторное задание прямых и плоскостей.

1. *Теорема о двух перпендикулярах*. Направление прямой можно задать вектором — направленным отрезком, лежащим на этой прямой. Такой вектор так и называют — *направляющим вектором* прямой.

Дана прямая l. Выберем на ней направляющий вектор $\mathbf{n}$. В плоскости даны три прямые: l_1, l_2 и l_3. Выберем на них направляющие векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Дано, что прямые l_1 и l_2 пересекаются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны и можно разложить по ним вектор $\mathbf{a}_3$, лежащий в одной плоскости с $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$: $\mathbf{a}_3 = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2$. По условию $l \perp l_1$, $l \perp l_2$. Требуется доказать, что $l \perp l_3$. Перпендикулярность прямых означает ортогональность лежащих на них векторов: $l \perp l_1 \Leftrightarrow \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_1 = 0$; $l \perp l_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_2 = 0$; $l \perp l_3 \Leftrightarrow \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_3 = 0$.

Проводим вычисления: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_3 = \mathbf{n}\cdot(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2) = \alpha_1\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_2 = 0 + 0 = 0$.

Теорема доказана.

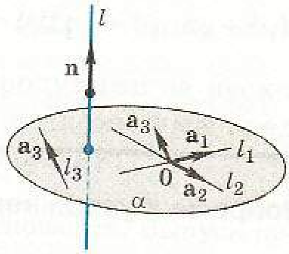
2. *Признак перпендикулярности плоскостей*. Если прямая l перпендикулярна плоскости α, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в частности, той, которая перпендикулярна линии пересечения плоскостей. Так как эта прямая вместе с исходной образуют линейный угол, измеряющий угол между плоскостями, то тем самым доказано, что этот угол прямой, т.е. плоскости перпендикулярны.

3. *Теорема о трех перпендикулярах*. Выберем на l направляющий вектор $\mathbf{a}$, спроектируем его на плоскость α, получим некоторый вектор $\mathbf{a}_1$, который является направляющим вектором прямой l_1. Разность векторов $\mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = \mathbf{n}$ ортогональна плоскости α. Возьмем

Теорема о двух перпендикулярах

Дано:
$l \perp l_1$, $l \perp l_2$, $l_1 \cap l_2 = 0$,
$l_1 \in \alpha$, $l_2 \in \alpha$, $l_3 \in \alpha$.

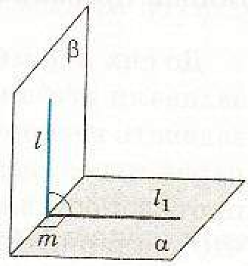
Доказать: $l \perp \alpha$.



Признак перпендикулярности плоскостей

Дано:
$l \in \beta$, $\alpha \cap \beta = m$, $l \perp \alpha$.

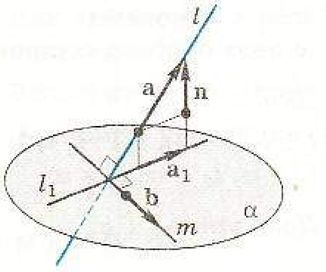
Доказать: $\alpha \perp \beta$.



Теорема о трех перпендикулярах

Дано:
$l \notin \alpha$, $m \in \alpha$, $l \perp m$,
l_1 — проекция прямой l на плоскость α.

Доказать: $l_1 \perp m$.



прямую m в плоскости α и выберем ее направляющий вектор $\mathbf{b}$. Вычислим скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{n})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{b}$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{b} = 0$, так как $\mathbf{b}$ лежит в плоскости α, а $\mathbf{n}$ — нормаль к этой плоскости. Видим, что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}$. Если одна часть этого равенства равна нулю, то и другая также равна нулю. Это означает, что условия $l \perp m$ и $l_1 \perp m$ равносильны, что и требовалось доказать.

Вопросы и упражнения

1. Сформулируйте теорему о двух перпендикулярах.
2. Каков признак перпендикулярности двух плоскостей?
3. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
4. Как в векторной форме сформулировать условие перпендикулярности:
   - двух прямых;
   - прямой и плоскости;
   - двух плоскостей?

БЕСЕДА

Векторное пространство

Новые примеры векторных величин

До сих пор мы рассматривали вектор как направленный отрезок, т.е. задавали его длиной и направлением. Введение координат позволяет задавать векторы наборами чисел. Так, вектор плоскости определяется парой чисел, вектор пространства — тройкой чисел. Для того чтобы не противопоставлять скалярные величины векторным, можно считать, что скалярные величины изображаются на прямой и задаются модулем (абсолютным значением) и направлением (знаком). Задание векторов наборами чисел позволяет получать новые векторные величины.

Рассмотрим множество квадратных трехчленов $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — произвольные действительные числа (мы допускаем обращение в нуль любого из коэффициентов a, b, c). Например, тройка чисел (1, 0, 0) задает трехчлен вида $x^2 + 0\cdot x + 0 = x^2$, а тройка чисел (2, –1, –1) — трехчлен $2x^2 - x - 1$. Квадратный трехчлен можно также рассматривать как вектор.

Векторное пространство

Как же выделить общие свойства векторных величин? Важным свойством, объединяющим все векторные величины, является возможность совершать с ними две операции: сложение и умножение на число.

Сложение параллельных переносов и умножение их на число известно из геометрии, сложение сил — из механики.

Если рассматривать строки из четырех чисел (a_1, a_2, a_3, a_4), задающих выпуск фиксированных четырех видов продукции, то естественно складывать их следующим образом:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4).$$

Это делается при суммировании выпуска продукции за несколько месяцев или определении выпуска продукции несколькими предприятиями, имеющими одинаковый ассортимент изделий.

Допустим, цех выпускает изделия четырех наименований. Выпуск продукции за месяц можно охарактеризовать строчкой из четырех чисел:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4),$$

где a_1 — число выпускаемых изделий первого вида; a_2, a_3, a_4 — аналогичные числа для изделий остальных видов.

Полностью определить выпуск продукции с помощью одного числа невозможно. Строчка (a_1, a_2, a_3, a_4), характеризующая выпуск продукции по ассортименту, является векторной величиной.

Аналогично складываются и умножаются на число квадратные трехчлены.

Примером n-мерного пространства при любом n является множество строчек длины n: $\mathbf{R}^n = \{(a_1; a_2; ...; a_n)\}$.

Сложение строчек и умножение их на число производится по следующим правилам:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n) + (b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_n) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n);$$

$$\lambda(a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

Обратим внимание на важную особенность приведенных примеров. Рассматривая квадратные трехчлены, мы не фиксировали внимание на каком-то одном из них, а брали сразу множество всех квадратных трехчленов. При изучении параллельных переносов полезно рассматривать все параллельные переносы; лишь тогда можно складывать их и умножать на число.

Таким образом, мы каждый раз имеем дело с множеством значений векторной величины, причем эти значения можно складывать и умножать на число. В примерах эти две операции удовлетворяют всем законам векторной алгебры. Эти правила мы уже фактически использовали в доказательствах, но не обращали на это внимания.

В математике множество объектов, которые можно складывать и умножать на число, называют *векторным пространством*, если для этих операций выполнены законы векторной алгебры.

Размерность

Изучение векторов мы начали с того, что указали величины, которые нельзя задавать одним числом. Оказалось возможным задавать эти величины несколькими числами, их координатами.

Так, силу, действующую на точку в пространстве, можно задавать тремя числами — проекциями силы на оси координат. Выпуск продукции цехом, изготовляющим четыре вида изделий, задается четырьмя числами — количеством выпускаемых изделий по каждому виду отдельно. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ задается тремя числами — коэффициентами a, b и c. Таким образом, векторные величины различаются тем, сколько чисел требуется определить для их задания (конечно, речь идет о наименьшем количестве чисел, нужных для вычислений векторной величины).

Если для задания векторной величины требуется n чисел, то говорят, что она является n-мерной векторной величиной, а про векторное пространство, образованное значениями этой величины, говорят, что оно имеет размерность n, или n-мерно.

Так, сила, действующая в пространстве, есть трехмерная векторная величина, размерность пространства параллельных переносов в плоскости равна двум, квадратные трехчлены заполняют трехмерное пространство, а выпуск продукции четырех видов изображается элементом такого пространства, для которого $n = 4$. Скалярные величины задаются одним числом. Их можно рассматривать как одномерные векторные величины.

Размерность векторной величины является ее основной характеристикой. Все векторные величины одной и той же размерности похожи друг на друга, например, тем, что каждую из них можно задавать строчкой из такого же количества чисел. Это сходство проявляется и в геометрическом изображении векторов.

Одномерные векторные величины — скаляры — изображаются на числовой прямой; двумерные — на плоскости; трехмерные — в пространстве.

Многие теоретические и прикладные дисциплины (физика, экономика, радиотехника и др.) используют n-мерные векторные пространства с $n > 3$.

ГЛАВА 6

Основы тригонометрии

Занятие 1
Углы и вращательное движение

Что такое угол и как он измеряется?

1. *Измерение углов*. В планиметрии углом называют часть плоскости, заключенную между двумя лучами с общей вершиной. Такие углы можно назвать *плоскими*.

Плоские углы можно измерять как доли *полного угла*. При измерении в *градусах* полный угол принимается за 360 градусов (360°). Одну шестидесятую долю градуса называют (угловой) минутой, а одну шестидесятую долю минуты — секундой.

Запись $\angle A = 100°12'23''$ означает, что угол A имеет меру 100 градусов, 12 минут и 23 секунды.

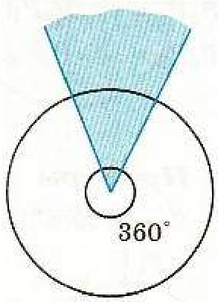
При измерении углов в *радианах* поступают следующим образом. Проводят окружность единичного радиуса с центром в вершине угла. Угол измеряется длиной стягивающей его дуги этой окружности. Полный угол будет иметь радианную меру, равную длине окружности радиуса 1, т.е. $2\pi \approx 6{,}28$. Число π (радианная мера развернутого угла) часто используется в качестве самостоятельной единицы, и углы измеряются в долях π. Например, угол 30° имеет меру $\frac{\pi}{6}$.

Формулы перехода от градусной меры к радианной и обратно таковы:

$$1° \approx 0{,}017;\ k° = \frac{\pi k}{180} \approx 0{,}017k;\ 1 \text{ рад} \approx 57{,}296°.$$

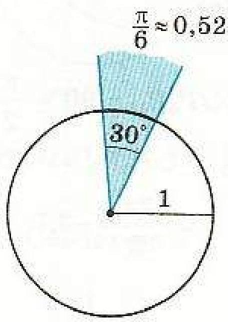
Измерение углов

- в градусах



$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ};\ 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$$

- в радианах

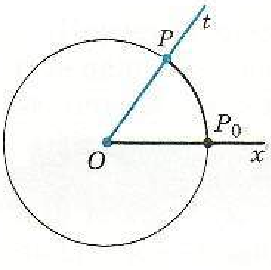


$$C = 2\pi R$$

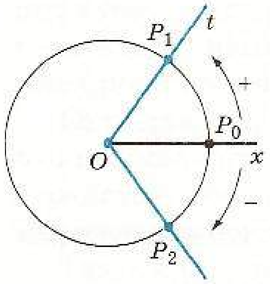
При $R = 1$ длина окружности $C = 2\pi$. Стягиваемый ею полный угол равен 360°.

$$30° = \frac{1}{12}\cdot 360° = \frac{1}{12}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

Угол поворота

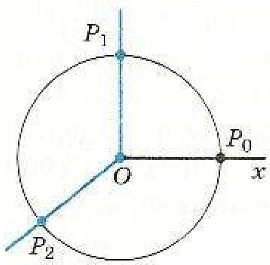


$$P_0P = |\cup P_0P| = t$$

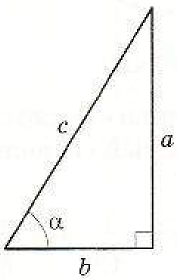


$$P_0P_1 = +|\cup P_0P_1|$$
$$P_0P_2 = -|\cup P_0P_2|$$

Примеры



$$P_0P_1 = |\cup P_0P_1| = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57;$$
$$P_0P_2 = |\cup P_0P_2| = -120^\circ =$$
$$= -\frac{2\pi}{3} \approx -2{,}1$$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Полезно запомнить, что часто встречающийся угол 60° чуть больше одного радиана $60^\circ \approx 1{,}07$.

2. *Вращательное движение*. Помимо плоских углов в геометрии рассматривают углы между прямыми и плоскостями, двугранные и многогранные углы, углы между векторами и т. п. Понятие угла возникает также в физике при изучении различных колебательных процессов, простейшие из которых можно описать с помощью *вращательного движения*.

Возьмем окружность радиуса 1 с центром в точке O. Проведем луч Ox с центром в точке O. Этот луч будем называть неподвижным. Возьмем другой экземпляр такого же луча и начнем его поворачивать вокруг точки O. Этот подвижный луч обозначим через Ot. Движение подвижного луча можно описать, введя понятие *угол поворота*. Точку пересечения неподвижного луча с единичной окружностью обозначим через P_0, а подвижного — через P. Поворот подвижного луча можно задать, рассматривая движение точки P по окружности. Угол поворота подвижного луча можно определить как длину пути, пройденного точкой P от начального положения P_0.

Так как вращение луча может происходить в двух различных направлениях, то одно из них считаем положительным (традиционно положительным направлением считается вращение против часовой стрелки), а противоположное — отрицательным. С учетом направления вращения углу приписывается знак «+» или «–».

Итак, поворот можно измерить действительным числом t, равным длине пути, который прошла точка P, с определенным знаком в зависимости от направления поворота.

Обратно: каждому действительному числу t можно сопоставить поворот луча Ot, двигая точку P по окружности, заставляя ее пройти путь, равный $|t|$ в направлении, определяемом знаком числа t.

Зачем обобщается понятие угла?

Одной из важнейших идей развития математики и ее приложений является переход от постоянных величин к переменным. Вычисления для конкретного геометрического треугольника выполняются с использованием стандартных операций (например, вычисление синуса и косинуса) над углами этого треугольника. Изучение движений, которые задаются переменными величинами, и прежде всего временем t, потребовало умения вычислять эти стандартные операции для любых значений t. Произвольному числу t мы умеем сопоставлять угол с помощью вращательного движения. Можно наглядно представлять себе, что мы наматываем числовую ось на барабан. Чтобы вычислить значение тригонометрической функции для числа t, сначала сопоставляем числу t некоторый угол, а затем применяем тригонометрию — вычисляем значение функции от этого угла.

Почему вращательное движение удобно для описания свойств тригонометрических функций?

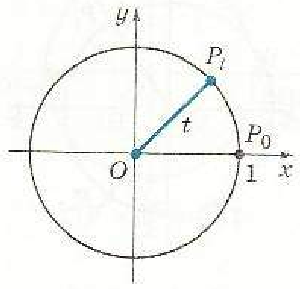
Тригонометрические функции нужны прежде всего для изучения колебательных периодических процессов. Эти функции будут определены с помощью вращательного движения. Такое движение проще всего описать, рассматривая движение точки P по единичной окружности в зависимости от времени t. Мы уже изложили, как можно сопоставить произвольному числу t некоторую точку на единичной окружности, которую обозначим через P_t. Точка P_0 — это точка пересечения неподвижного луча с окружностью. Точка P_t — это точка пересечения с этой окружностью подвижного луча, повернувшегося на угол поворота t. Теперь можно записать геометрически очевидные связи между точками P_t при различных значениях t.

Для этого поместим окружность в прямоугольную систему координат так, чтобы центр окружности совпадал с началом системы координат и точка P_0 имела координаты (1; 0).

Свойства вращательного движения.

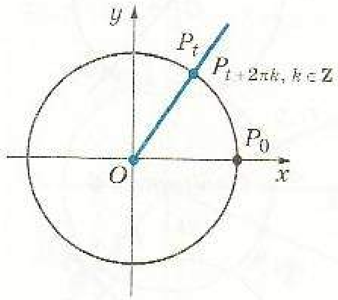
1. Для всякого целого числа k точка P_t совпадает с точкой $P_{t+2\pi k}$.

Свойства вращательного движения

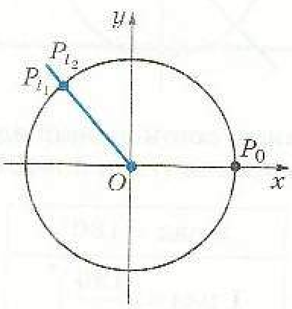


$$|\cup P_0P_t| = t$$

Свойство 1

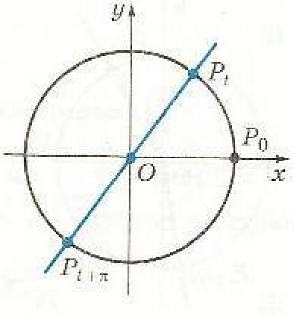


Свойство 2

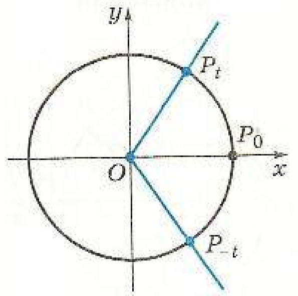


$$t_2 - t_1 = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

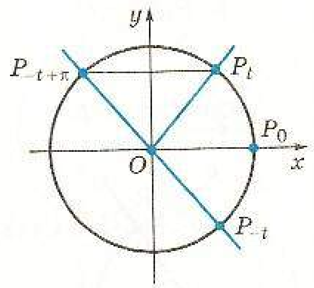
Свойство 3



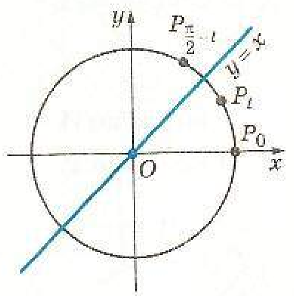
Свойство 4



Свойство 5

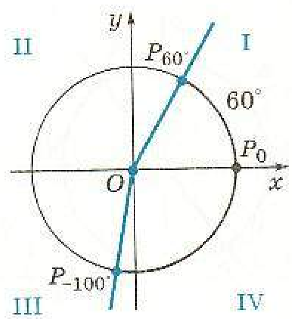


Свойство 6



Основные соотношения единиц измерения углов поворота

π рад $= 180^\circ$
1 рад $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$
$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$



2. Если $P_{t_1} = P_{t_2}$, то найдется такое целое число k, что $t_1 = t_2 + 2\pi k$.

3. Для всякого значения t точки P_t и $P_{t+\pi}$ диаметрально противоположны.

4. Для всякого значения t точки P_t и P_{-t} симметричны друг другу относительно оси абсцисс.

5. Для всякого значения t точки P_t и $P_{-t+\pi}$ симметричны относительно оси ординат.

6. Для всякого значения t точки P_t и $P_{\frac{\pi}{2}-t}$ симметричны друг другу относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Как используется обобщение понятия угла при решении задач?

1. *Перевод градусной меры измерения углов в радианную и обратно.* Один и тот же угол можно записать в градусах и радианах. При этом величину угла в радианах часто можно записать как рациональную долю угла π. Это можно делать для углов, соизмеримых с развернутым:

$$120^\circ = \frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09;$$

$$1000^\circ = \frac{1000}{180}\pi = \frac{50}{9}\pi \approx 17{,}453;$$

$$-\frac{101}{12}\pi = -\left(\frac{101}{12}\cdot 180\right)^\circ = -1515^\circ \approx$$

$$\approx -\frac{101}{12}\cdot 3{,}14 \approx -26{,}43;$$

$$3 = \left(\frac{3}{\pi}\cdot 180\right)^\circ \approx 172^\circ.$$

2. *Определение четверти, в которой лежит угол.* Координатные оси разбивают плоскость на четыре четверти. При сопоставлении числу t точки P_t на единичной окружности часто полезно сначала определить, в какой четверти будет лежать эта точка (или, как часто говорят, в какой четверти (I, II, III, IV) будет лежать данный угол t).

При решении этой задачи надо учесть *знак* числа t (это определит направление движения) и сопоставить *меру* угла (градусную, радианную, в долях π) с соответствующей мерой одной четверти (прямого угла) — $90°$, $\approx 1{,}57$, $\frac{\pi}{2}$.

Одновременно можно решать задачу построения точки P_t на единичной окружности для заданного значения t.

На рисунке выполнено это построение для следующих значений t:

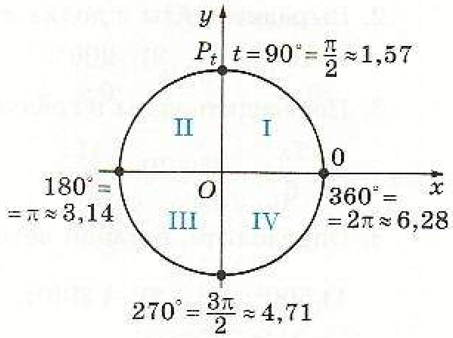
1) $t = 100°$; 3) $t = 4$;

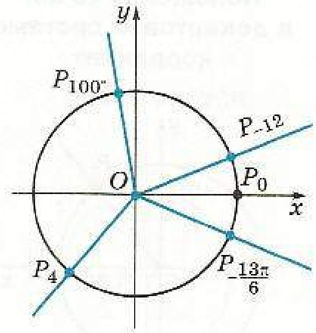
2) $t = -\frac{13\pi}{6}$; 4) $t = -12$.

При задании t в радианах полезно приблизительно представить t в виде суммы целого кратного $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ и числа, по модулю меньшего $\frac{\pi}{2}$.

Так, $4 = \pi + \alpha$, где $\alpha \approx 0{,}86$, и, следовательно, угол $t = 4$ попадает в третью четверть.

Аналогично, $-12 = -4\pi + \alpha$, где $\alpha \approx 0{,}57$, и угол попадает в первую четверть.





? Вопросы и упражнения

1. Проверьте верность следующих утверждений:

   1) точки P_0 и $P_{\frac{\pi}{2}}$ диаметрально противоположны;

   2) точки $P_{\frac{\pi}{2}}$ и $P_{-\frac{3\pi}{2}}$ совпадают;

   3) точки P_0, $P_{\frac{2\pi}{3}}$ и $P_{-\frac{2\pi}{3}}$ — вершины правильного треугольника;

   4) точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ и $P_{\frac{\pi}{4}}$ симметричны относительно оси абсцисс;

   5) точки $P_{\frac{9\pi}{4}}$ и $P_{\frac{3\pi}{4}}$ симметричны относительно оси ординат;

   6) абсциссы точек $P_{\frac{\pi}{8}}$ и $P_{\frac{7\pi}{8}}$ совпадают;

   7) среди точек вида $P_{\frac{k\pi}{2}}$ (k — целое) ровно четыре различные;

   8) если точка P_t лежит во второй четверти, то точка P_{-t} — в четвертой;

   9) если точка P_t лежит в первой четверти, то и точка $P_{\frac{\pi}{2}-t}$ лежит в первой четверти;

   10) точки P_t и P_{t+3} всегда лежат в соседних четвертях.

2. Выразите углы в долях π:

1) $135°$; 2) $-200°$; 3) $1\,200°$; 4) $-330°$.

3. Переведите углы в градусную меру:

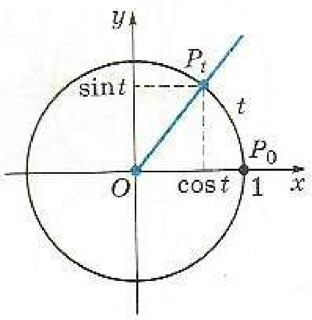
1) $\frac{7\pi}{6}$; 2) $-\frac{41\pi}{15}$; 3) 10π; 4) $-\frac{99\pi}{25}$.

4. Определите, в какой четверти лежит данный угол:

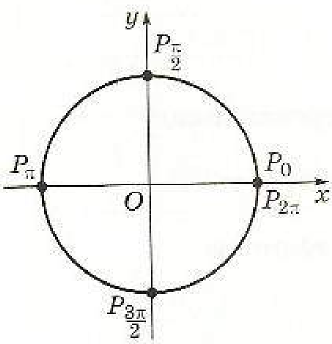
1) $500°$; 2) $-1\,290°$; 3) $\frac{19\pi}{3}$; 4) $-\frac{100\pi}{7}$; 5) $2{,}5$; 6) -7.

Занятие 2
Тригонометрические операции

Положение точки в декартовой системе координат



Координаты точек — границ четвертей



$P_0(1;\ 0)$ $P_\pi(-1;\ 0)$

$P_{\frac{\pi}{2}}(0;\ 1)$ $P_{\frac{3\pi}{2}}(0;\ -1)$

$P_{2\pi}(1;\ 0)$

Что составляет основу тригонометрии?

1. *Определения.*

Положение движущейся точки удобно описывать в декартовых координатах.

Свяжем с вращением точки по окружности стандартную декартову систему координат.

Переход от угла поворота точки к ее декартовым координатам задает основные тригонометрические операции — синус и косинус.

Рассмотрим вращение по единичной окружности с центром O точки P с начальным положением P_0.

Выберем декартову систему xOy, взяв в качестве положительного луча оси абсцисс Ox луч OP_0, а в качестве оси ординат Oy ось, повернутую от Ox на угол $\frac{\pi}{2}$ в выбранном положительном направлении вращения.

При повороте на угол t точка P_0 переходит в точку P_t.

> ***Косинусом*** числа t называется абсцисса точки P_t (t — произвольное действительное число).

> ***Синусом*** числа t называется ордината точки P_t (t — произвольное действительное число).

Таким образом, координаты точки P_t в определенной выше системе координат равны по определению косинусу и синусу t. В обычных обозначениях: $P_t(x;\ y)$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$.

2. *Дополнительные операции.*

Вместе с операциями синус и косинус можно определить еще две операции — тангенс и котангенс:

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t};\quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.}$$

Разумеется, операции нахождения тангенса и котангенса определены не для всех углов t, а только для тех, при которых знаменатели дробей не обращаются в нуль.

3. *Свойства синуса и косинуса.*

1) Операции нахождения синуса и косинуса числа (угла) t определены при любом действительном t.

2) При вычислении синуса и косинуса наблюдается *периодичность* — значения синуса и косинуса для двух значений t, отличающихся на 2π, равны: $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ и $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ при любом значении t.

3) В каждой четверти как синус, так и косинус сохраняют *постоянный знак*. Под этим понимается, что знаки $\sin t$ и $\cos t$ зависят от того, в какую четверть попадает точка P_t.

В тех точках, где синус (косинус) меняет знак, он обращается в нуль.

4. *Формулы приведения:*

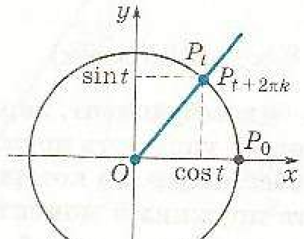
$$\sin(-t) = -\sin t,\ \cos(-t) = \cos t;$$
$$\sin(t + \pi) = -\sin t,\ \cos(t + \pi) = -\cos t;$$
$$\sin(-t + \pi) = \sin t,\ \cos(-t + \pi) = -\cos t;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$$

Зачем вводятся тригонометрические функции?

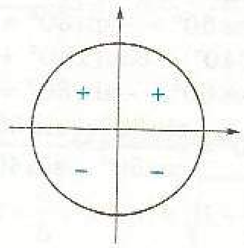
Первоначально тригонометрические функции использовались для геометрических вычислений, в астрономии, картографии и других естественных науках, где нужно было «решать треугольники», т.е. вычислять длины отрезков и расстояния между точками, зная различные углы между направлениями.

Примеры

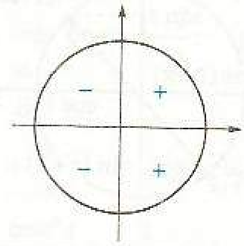
- $\operatorname{tg} 0^\circ = \dfrac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \dfrac{0}{1} = 0;$
- $\operatorname{ctg} 0^\circ = \dfrac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ} = \dfrac{1}{0}$ — не существует.



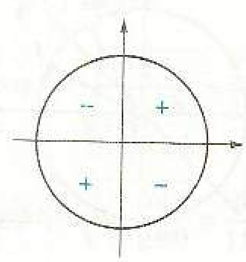
Знаки синуса



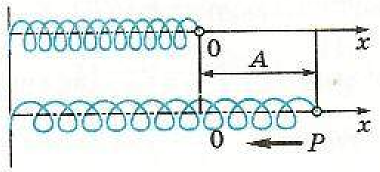
Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса



Колебания упругой пружины



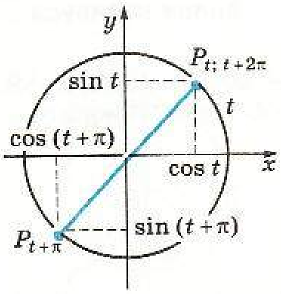
$$x = A\sin(\omega t + \alpha),$$

где ω — коэффициент, характеризующий упругость пружины; A — расстояние, на которое оттянута пружина в момент времени t (амплитуда колебаний); α — начальное отклонение.

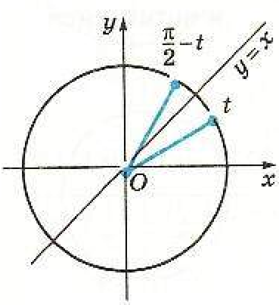
Примеры

- $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = 0{,}5;$
- $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\sin 30^\circ = -0{,}5;$
- $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\sin 30^\circ = -0{,}5;$
- $\mathrm{tg}\, 50^\circ = \dfrac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = \dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ}.$

Центральная симметрия



Симметрия относительно прямой y = x



При переходе к «математике переменных величин» появилась необходимость описывать периодические процессы — от астрономических наблюдений за движением небесных тел до гармонических колебаний, значение которых резко возросло в связи с развитием теории электричества.

С помощью тригонометрических операций с отдельными числами можно определить тригонометрические функции, которые и стали основой ряда разделов математики.

Обратим внимание на то, что для вычислений хватило бы одной тригонометрической операции, например синуса.

Остальные операции можно выразить через синус:

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right); \quad \mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)};$$

$$\mathrm{ctg}\, t = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin t}.$$

Имеются еще две операции — секанс и косеканс:

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}, \quad \mathrm{cosec}\, t = \frac{1}{\sin t}.$$

Итак, изучение тригонометрии будет вестись в следующей последовательности: преобразование выражений, содержащих тригонометрические операции; изучение функций, задаваемых этими операциями; решение уравнений, в которые входят тригонометрические функции.

Почему выполняются важнейшие свойства тригонометрических операций?

Основные свойства тригонометрических операций отражают их связь с вращательным движением, которое в свою очередь обладает разнообразной симметрией.

Запишем в таблицу сравнение свойств вращения точки P и ее координат $P_t(\cos t;\ \sin t)$ при повороте на угол t:

Периодичность	$P_t = P_{t+2\pi}$	$\cos(t+2\pi) = \cos t$; $\sin(t+2\pi) = \sin t$
Центральная симметрия	P_t и $P_{t+\pi}$ симметричны относительно центра поворота	$\cos(t+\pi) = -\cos t$; $\sin(t+\pi) = -\sin t$
Осевая симметрия	P_t и $P_{-t+\pi}$ симметричны относительно оси ординат	$\cos(-t+\pi) = -\cos t$; $\sin(-t+\pi) = -\sin t$
	P_t и P_{-t} симметричны относительно оси абсцисс	$\cos(-t) = \cos t$; $\sin(-t) = -\sin t$
Симметрия относительно прямой $y = x$	P_t и $P_{\frac{\pi}{2}-t}$ симметричны относительно прямой $y = x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t$

К числу важнейших свойств тригонометрических операций следует отнести также *основное тригонометрическое тождество*:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1.}$$

Оно является следствием теоремы Пифагора.

Как используются свойства тригонометрических операций при первичном знакомстве с ними?

1. *Вычисление значений.*

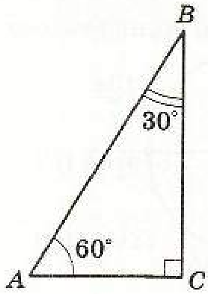
1) Прежде всего полезно помнить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для «знаменитых» углов (0°, 30°, 45°, 60°, 90°), т.е. для некоторых частных значений аргумента t. Эти значения находятся с помощью известных простых теорем планиметрии.

Примеры

$\sin^2 50° + \cos^2 50° = 1$;

$\sin^2 1 + \cos^2 1 = 1$;

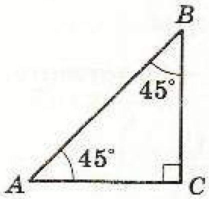
$\sin^2 0 + \cos^2 0 = 1$.



$$AC = \frac{1}{2}AB$$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$$



$$AC = BC$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = AC\sqrt{2}$$

Примеры

- $\sin t = \dfrac{3}{5}$: $|\cos t| = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$; $|\operatorname{tg} t| = \dfrac{3}{4}$; $|\operatorname{ctg} t| = \dfrac{4}{3}$.

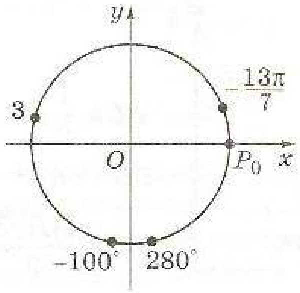
Если дополнительно известно, что t лежит во второй четверти, то $\cos t = -\dfrac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = -\dfrac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{4}{3}$;

- $\operatorname{tg} t = \dfrac{5}{12}$: $\quad \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1$, откуда $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}$. Аналогично $\sin^2 t = \dfrac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$.

$$|\cos t| = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{25}{144}}} = \frac{12}{13};$$

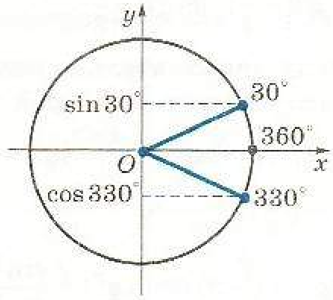
$$|\sin t| = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Если известно, что $t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то можно уточнить знаки: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = -\frac{5}{13}$.



Примеры

- $\sin 280°$: $280°$ — IV четверть; $\sin 280° < 0$;
- $\cos\left(-\frac{13}{7}\pi\right)$: $-\frac{13}{7}\pi$ — I четверть; $\cos\left(-\frac{13}{7}\pi\right) > 0$;
- $\operatorname{tg} 3$: 3 — II четверть; $\operatorname{tg} 3 < 0$;
- $\operatorname{ctg}(-100°)$ — III четверть; $\operatorname{ctg}(-100°) > 0$.



Примеры

- $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;
- $\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) = \cos\left(-5\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$;
- $\operatorname{ctg} 1000° = \operatorname{ctg}(900° + 90° + 10°) = \operatorname{ctg}(90° + 10°) = -\operatorname{tg} 10°$.

Приведем таблицу значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, наиболее часто встречающихся в заданиях:

Функция	Значение				
	$t = 0$	$t = \frac{\pi}{6}$	$t = \frac{\pi}{4}$	$t = \frac{\pi}{3}$	$t = \frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует
$\operatorname{ctg} t$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2) Значения тригонометрических операций для остальных углов находят с помощью калькулятора (например, $\sin 1 = 0{,}8415$; $\cos 1 = 0{,}5403$; $\operatorname{tg} 1 = 1{,}5574$; $\operatorname{ctg} 1 = 0{,}6421$).

3) Зная значение одной из четырех тригонометрических операций, можно найти значения остальных с *точностью до знака*.

Для уточнения знака нужна дополнительная информация (например, достаточно знать, в какой четверти находится угол).

2. *Определение знака.*

Сначала определяем четверть, в которой находится угол (I ... IV), и затем — знак, используя таблицу или с помощью тригонометрического круга.

3. *Сведение к углу I четверти.*

Симметрия значений тригонометрических операций позволяет сводить их вычисление к нахождению углов I четверти.

Соответствующие правила называют *формулами приведения.*

Например, к формулам приведения можно отнести следующие:

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right);$$

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Вопросы и упражнения

1. В каких четвертях косинус отрицателен?
2. В каких четвертях тангенс положителен?
3. Как меняются координаты точки при симметрии относительно начала координат?
4. Как меняются координаты точки при осевых симметриях относительно осей координат?
5. Определите знак числа:

1) $\sin 160°$; 4) $\operatorname{ctg}(-400°)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 10) $\cos(-3)$;

2) $\cos 200°$; 5) $\sin\left(-\frac{7\pi}{11}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{22\pi}{11}$; 11) $\operatorname{tg}\sqrt{2}$;

3) $\operatorname{tg} 310°$; 6) $\cos\frac{31\pi}{5}$; 9) $\sin 2{,}5$; 12) $\operatorname{ctg} 11$.

6. Вычислите:

1) $\sin 225°$; 3) $\operatorname{tg} 390°$; 5) $\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3}$;

2) $\cos 570°$; 4) $\operatorname{ctg} 765°$ 6) $\cos\frac{31\pi}{6}$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$.

7. Зная значение одной из тригонометрических функций, найдите значения остальных:

1) $\sin t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$; 3) $\operatorname{tg} t = 3$; $\cos t < 0$;

2) $\cos t = -\frac{5}{17}$; $t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} t = -0{,}75$; $\sin t > 0$.

Занятие 3
Преобразование тригонометрических выражений

Что полезно знать для преобразования тригонометрических выражений?

1. *Основное тригонометрическое тождество* и следствия из него:

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$	$\lvert\cos t\rvert = \sqrt{1-\sin^2 t}$
$\lvert\sin t\rvert = \sqrt{1-\cos^2 t}$	$1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$
$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$	$1+\operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$
$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$	$\cos^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$
$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$	$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$

Основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}$$

Примеры

Формулы приведения

- $\sin 370° = \sin(10° + 360°) = \sin 10°$;
- $\cos 190° = \cos(10° + 180°) = -\cos 10°$;
- $\operatorname{tg} = \frac{9\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$;
- $\sin 80° = \sin(90° - 10°) = \cos 10°$.

Формулы сложения

- $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$;
- $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2} = 2+\sqrt{3}.$

Формулы удвоения

- $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$;
- $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;
- $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$;
- $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Примеры

- $\sin 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$;
- $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$;

2. *Формулы приведения:*

- $\sin(t + 2\pi k) = \sin t$; $\cos(t + 2\pi k) = \cos t$, $k \in \mathbf{Z}$;
- $\sin(t + \pi) = -\sin t$; $\cos(t + \pi) = -\cos t$;
- $\sin(-t) = -\sin t$; $\cos(-t) = \cos t$;
- $\sin(\pi - t) = \sin t$; $\cos(\pi - t) = -\cos t$;
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$;
- $\operatorname{tg}(t + k\pi) = \operatorname{tg} t$; $\operatorname{ctg}(t + k\pi) = \operatorname{ctg} t$; $k \in \mathbf{Z}$;
- $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$; $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$;
- $\operatorname{tg}(\pi - t) = \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$; $\operatorname{ctg}(\pi - t) = -\operatorname{ctg} t$;
- $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t$; $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$.

3. *Формулы сложения:*

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$;
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$;
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$;
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$;
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$;
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.

4. *Формулы удвоения:*

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Зачем преобразуют тригонометрические выражения?

Один известный математик задал вопрос: «Кому нужен весь этот калейдоскоп формул тригонометрии?». Он же ответил на этот вопрос так: «Представителям двух почтенных профессий — геодезистам и составителям текстов выпускных и вступительных экзаменов». На самом деле это не совсем так — преобразование тригонометрических выражений помимо приобретения опыта может иметь достаточно ясные цели, например:

- научиться выражать одни операции через другие (это бывает полезно при вычислении и сравнении их значений);

- сводить вычисления к нахождению значений тригонометрических операций для острых углов;
- при изучении вращательного движения приходится складывать, последовательно выполнять повороты (для этого полезно использовать формулы сложения).

Почему верны приведенные формулы тригонометрии и можно ли расширить их перечень при необходимости?

Как отмечалось, основное тригонометрическое тождество доказывается с помощью теоремы Пифагора. Формулы приведения являются следствием симметрии вращательного движения.

Самые трудные для доказательства — формулы сложения. Заметим, что достаточно доказать одну из них — другие сведутся к ней с помощью формул приведения.

Приведем доказательство формулы

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Рассмотрим на тригонометрической окружности точки $P_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ и $P_\beta(\cos\beta;\ \sin\beta)$. Векторы $\overrightarrow{OP_\alpha}$ и $\overrightarrow{OP_\beta}$ имеют единичную длину, и угол между ними равен $\alpha-\beta$. Вычислим скалярное произведение этих векторов по определению и с помощью координатной формулы:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=|OP_\alpha|\cdot|OP_\beta|\cdot\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Формулы удвоения являются частными случаями формул сложения.

Из основных формул можно вывести много новых. Укажем наиболее употребительные.

1. *Формулы половинного угла.*

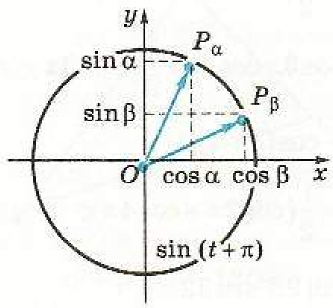
Из формул двойных углов можно получить формулы для синуса и косинуса половинного угла.

Сначала запишем:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha);\quad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha).$$

- $\mathrm{tg}15^\circ=\dfrac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=$
$$=\left(\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3-1)\right):\left(\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3+1)\right)=$$
$$=\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}=\frac{1}{2}(\sqrt3-1)^2=\sqrt3-1.$$

Доказательство формулы $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



Доказательство формулы $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$\cos2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-$$
$$-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Примеры

- $\cos^2 2x=\dfrac{1}{2}(1+\cos4x);$
- $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos x);$
- $\sin5\alpha+\sin3\alpha=2\sin\dfrac{5\alpha+3\alpha}{2}\times$
$$\times\cos\frac{5\alpha-3\alpha}{2}=2\sin4\alpha\cos\alpha;$$
- $\sin72^\circ-\sin12^\circ=$
$$=2\sin\frac{72^\circ-12^\circ}{2}\cdot\cos\frac{72^\circ+12^\circ}{2}=$$
$$=2\sin30^\circ\cos42^\circ=\cos42^\circ;$$
- $\sin20^\circ+\sin40^\circ=$
$$=2\sin\frac{20^\circ+40^\circ}{2}\cdot\cos\frac{40^\circ-20^\circ}{2}=$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\cos10^\circ=\cos10^\circ;$$

- $\cos 34^\circ + \cos 26^\circ =$
  $= 2\cos\frac{34^\circ + 26^\circ}{2} \cdot \cos\frac{34^\circ - 26^\circ}{2} =$
  $= 2\cos 30^\circ \cos 4^\circ = \sqrt{3}\cos 4^\circ;$
- $\cos 8x - \cos 4x =$
  $= -2\sin\frac{8x + 4x}{2} \cdot \sin\frac{8x - 4x}{2} =$
  $= -2\sin 6x \sin 2x;$
- $\sin 3\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}(\sin(3\alpha + \alpha) +$
  $+ \sin(2\alpha - \alpha)) =$
  $= \frac{1}{2}(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha);$
- $\cos 3x \cos x = \frac{1}{2}(\cos(3x - x) +$
  $+ \cos(3x + x)) =$
  $= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x);$
- $\sin 28^\circ \sin 32^\circ =$
  $= \frac{1}{2}(\cos(32^\circ - 28^\circ) -$
  $- \cos(32^\circ + 28^\circ)) =$
  $= \frac{1}{2}(\cos 4^\circ - \cos 60^\circ) =$
  $= \frac{1}{2}\left(\cos 4^\circ - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\cos 4^\circ - 1}{4};$
- $3\sin t + 4\cos t =$
  $= 5\left(\frac{3}{5}\sin t + \frac{4}{5}\cos t\right) =$
  $= 5(\cos\alpha \sin t + \sin\alpha \cos t) =$
  $= 5\sin(t + \alpha)$, где $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,
  $\sin\alpha = \frac{4}{5};$
- $3\sin t + 4\cos t =$
  $= 5\left(\frac{3}{5}\sin t + \frac{4}{5}\cos t\right) =$
  $= 5(\sin\gamma \sin t + \cos\gamma \cos t) =$
  $= 5\cos(t - \gamma)$, где $\sin\gamma = \frac{3}{5}$,
  $\cos\gamma = \frac{4}{5}.$

Затем в этих формулах подставим $\frac{\alpha}{2}$ вместо α. Получим

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha); \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Извлекая корень, имеем:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Для того чтобы раскрыть модули, надо знать, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

2. *Выражение операций через тангенс половинного угла*. Оказывается, что все тригонометрические функции от аргумента x (и от nx при целом n) выражаются через тангенс угла $\frac{x}{2}$ рационально, без квадратных корней. Выведем эти полезные формулы.

Напишем формулы двойного угла для исходного угла $\frac{x}{2}$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}; \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}.$$

Представим число 1 в виде $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ и поделим на это выражение правые части последних формул:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}.$$

Поделим теперь числитель и знаменатель каждой дроби на $\cos^2\frac{x}{2}$ и заменим $\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$ на $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ и $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

- $$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

3. *Преобразование суммы в произведение и обратно.* Пусть требуется преобразовать сумму $\sin\alpha + \sin\beta$ в произведение. Применим следующий искусственный прием — воспользуемся тождествами $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ и $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$, а также формулами для синусов суммы и разности:

- $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Аналогично выводятся еще три формулы:

- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Выпишем подряд четыре формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Вычитая почленно из четвертого равенства третье, получим

- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

Сложив третье и четвертое равенства, имеем

- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$.

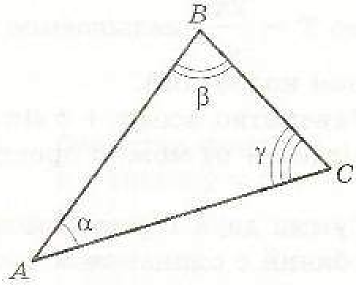
Сложив затем два первых равенства, получим

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

Пример

Доказать, что для углов треугольника выполняется тождество $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Сначала сложим $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ и заменим $\alpha+\beta$ на $\pi-\gamma$ (сумма углов треугольника равна π):



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Раскроем $\sin\gamma$ по формуле удвоения:

$$\sin\gamma = \sin(\pi-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Сложим все вместе:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Введение вспомогательного угла

Это преобразование часто применяют при изучении гармонических колебаний, т. е. процессов, которые можно описать функцией $y = A\sin(\omega x + \alpha)$, $A > 0$ или $y = A\cos(\omega x + \alpha)$, $A > 0$.

В такой записи A называют амплитудой колебаний, ω — угловой скоростью, α — начальной фазой. Вместо угловой скорости ω обычно рассматривают число $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, называемое периодом колебаний.

Равенство $a\cos x + b\sin x = A\sin(\omega x + \alpha)$ можно прочесть так:

Сумма двух гармонических колебаний с одинаковой частотой есть гармоническое колебание с той же частотой.

Пример

$$3\cos\pi x + 4\sin\pi x =$$
$$= 5\left(\frac{3}{5}\sin\pi x + \frac{4}{5}\sin\pi x\right) =$$
$$= 5\sin(\pi x + \alpha).$$

Здесь $A = 5$, $\omega = \pi$, $\alpha = \arcsin\dfrac{3}{5} = \arccos\dfrac{4}{5} = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

Как выполняются преобразования тригонометрических выражений?

Рассмотренные тождества, связывающие тригонометрические функции, запомнить трудно и приходится обращаться к таблицам и справочникам. Необходимо уметь применять их, знать, какие функции они между собой связывают и что с их помощью можно получить.

Как преобразовать выражение $\sin t + \sqrt{3}\cos t$?

Сначала умножим и разделим на 2, а затем применим формулу сложения:

$$\sin t + \sqrt{3}\cos t = 2\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) =$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin t + \sin\frac{\pi}{3}\cos t\right) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Эти преобразования можно выполнить в общем виде:

$$a\sin t + b\cos t =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\alpha),$$

где α — угол, для которого $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Такой угол всегда можно найти.

Вопросы и упражнения

1. Вычислите:

1) $\sin 2^\circ \cos 28^\circ + \sin 28^\circ \cos 2^\circ$;

2) $\cos 73^\circ \cos 13^\circ + \sin 73^\circ \sin 13^\circ$;

3) $\sin 50^\circ \sin 5^\circ + \cos 50^\circ \cos 5^\circ$;

4) $\cos\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{5\pi}{24} - \cos\dfrac{5\pi}{24}\sin\dfrac{3\pi}{8}$;

5) $\cos 100^\circ \sin 10^\circ - \sin 100^\circ \cos 10^\circ$;

6) $\cos 170^\circ \sin 35^\circ - \cos 35^\circ \sin 170^\circ$;

7) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{3\pi}{8}$;

8) $\sin 105^\circ \sin 75^\circ + \sin 15^\circ \cos 105^\circ$;

9) $\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \cos 70^\circ \sin 25^\circ$;

10) $\cos 43^\circ \cos 17^\circ - \cos 47^\circ \cos(-73^\circ)$.

2. Докажите тождества:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha = \sin 2\alpha;$

2) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha;$

3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1+\cos^2 2\alpha}{2};$

4) $\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin\alpha;$

5) $2\cos^4\alpha + \sin^2 2\alpha + 2\sin^4\alpha = 2;$

6) $1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$

7) $1-\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right);$

8) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$

9) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$

10) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha.$

Занятие 4
Тригонометрические функции

Что изучает теория тригонометрических функций?

Тригонометрические операции позволяют для каждого числа x вычислить значения синуса и косинуса: $\sin x$ и $\cos x$. С помощью этих операций можно определить основные тригонометрические функции:

$$y = \sin x; \ y = \cos x.$$

Основные свойства функций $\sin x$ ***и*** $\cos x$.

1. *Область определения*: $\mathbb{R}$, т.е. функции определены на всей числовой оси.

2. *Периодичность*: эти функции периодичны с основным периодом 2π.

3. *Симметрия*: $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$.

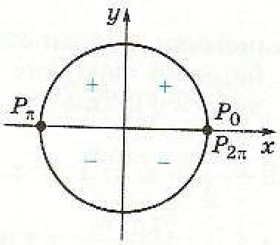
4. *Обращение в нуль*: в пределах основного периода каждая из этих функций дважды обращается в нуль. Например, в промежутке $[0; 2\pi)$ синус обращается в нуль при $x = 0$ и $x = \pi$, а косинус — при $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$.

5. *Сохранение знака*: в пределах основного периода каждая из этих функций сохраняет постоянный знак между точками обращения в нуль. Например, при $x \in (0; \pi)$ синус положителен, при $x \in (\pi; 2\pi)$ — отрицателен. Для косинуса удобнее взять промежуток длиной 2π с концами в нулях этой функции, например промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Для

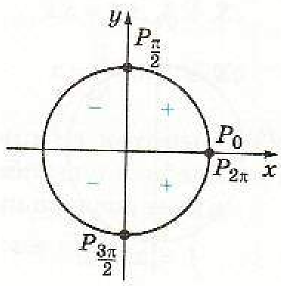
Свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Свойство 4

$y = \sin x$ на $[0; 2\pi)$

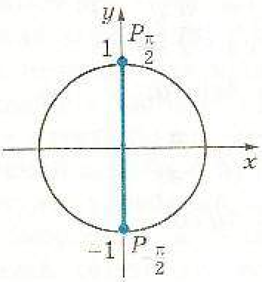


$y = \cos x$ на $[0; 2\pi)$

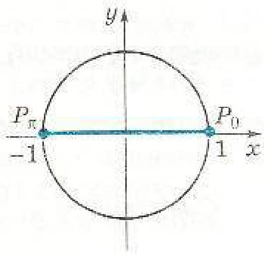


Свойства 6 и 8

$y = \sin x$

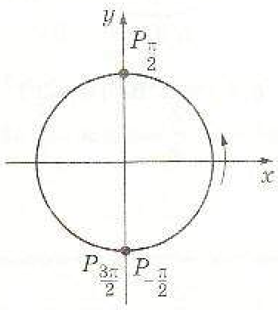


$y = \cos x$

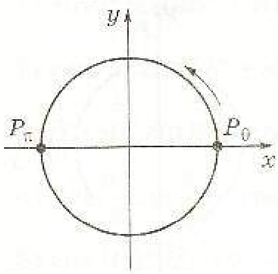


Свойство 7

$y = \sin x$



$y = \cos x$



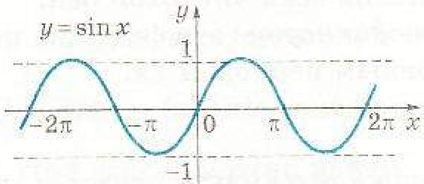
этого промежутка косинус положителен при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и отрицателен при $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

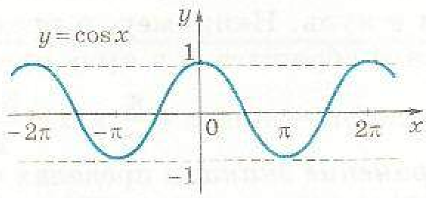
6. *Наибольшее и наименьшее значения*: в пределах основного периода синус и косинус по одному разу принимают свое наименьшее и наибольшее значения, равные соответственно −1 и +1. На промежутке $[0; 2\pi)$ имеем: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$; $\cos 0 = 1$; $\cos \pi = -1$.

7. *Промежутки монотонности*: точки, в которых синус и косинус принимают наименьшее и наибольшее значения, делят область определения на промежутки, в каждом из которых эти функции строго монотонны. Например, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ синус возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Аналогично косинус убывает на промежутке $[0; \pi]$ и возрастает на промежутке $[\pi; 2\pi)$.

8. *Область значений*: промежуток между наименьшим и наибольшим значениями, т. е. отрезок $[-1; 1]$.

9. *Графики* синуса и косинуса:





Зачем исследуется периодичность тригонометрических функций?

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ относятся к важному классу *периодических функций*. Обсудим это понятие в общем виде и применим результаты этого обсуждения к уточнению свойств синуса и косинуса.

Когда говорят, что функция $y = f(x)$ периодична с периодом $T \neq 0$, то под этим понимают следующее:

1) ее область определения «периодична», т.е. вместе с каждой точкой $x = a$ эта функция определена при $x = a - T$ и при $x = a + T$. Тем самым она определена при всех $x = a + kT$, где $k \in \mathbf{Z}$, т.е. k — любое целое число;

2) для каждого значения a, входящего в область определения, выполняется равенство: $f(a) = f(a + T)$. Тем самым равны между собой значения функции во всех точках вида $a + kT$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Если число T является периодом функции f, то и числа $-T$, $2T$, kT при любом $k \in \mathbf{Z}$ также являются ее периодами.

Так как мы предположили, что вместе с x точки вида $x + kT$ при всех целых значениях k входят в область определения функции, то значения функции во всех этих точках равны между собой:

$$f(x - T) = f(x - T + T) = f(x);$$

$$f(x + 2T) = f(x + T + T) = f(x + T) = f(x)$$

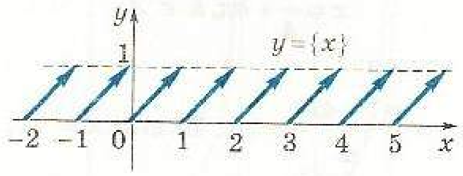
и т.п.

Тем самым, если у функции есть хотя бы один ненулевой период, то имеется и положительный период. Как правило, среди положительных периодов функции можно указать *наименьшее* число, которое часто называют *основным периодом*.

Число 2π является положительным периодом синуса и косинуса (это следствие периодичности вращательного движения) и притом *наименьшим* положительным периодом. Действительно, если бы число $T_0 < T < 2\pi$ было бы периодом синуса или косинуса, то мы бы имели: $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1$. Однако после точки $\frac{\pi}{2}$ синус принимает значение 1 только в точке $\frac{5\pi}{2}$, а $\frac{\pi}{2} + T < \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$. Аналогичное рассуждение можно провести и для косинуса — свое наименьшее (или наибольшее

Периодическая функция

График функции $y = \{x\}$



Наименьший положительный период $T = 1$.

Числа $T = 2$, $T = -1$, $T = 3$ и т.д. также являются периодами этой функции, поэтому, например, $f(0{,}5) = f(1{,}5) = f(-0{,}5) = f(2{,}5)$ и т.д.

В общем виде: $\{x\} = \{x + 1\} = \{x - 1\} = \{x + 2\}$ и т.д.

Нули функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}(2k + 1),$$

$k \in \mathbf{Z}$.

Наибольшее и наименьшее значения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\left(\text{или } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z};$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in Z;$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z;$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Функция $y = \sin 2x$

- нули функции:

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{1}{2}k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

- точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения:

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

или

$$x = \frac{\pi(1+4k)}{4},\ \ k \in \mathbf{Z};\ \sin 2x = -1;$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

или

$$x = \frac{\pi}{4}(4k-1),\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Промежутки монотонности функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

- Синус возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right),\ \ k \in \mathbf{Z}.$
- Косинус возрастает на промежутках $[\pi + 2k\pi;\ 2\pi + 2k\pi)$ и убывает на промежутках $[2k\pi;\ \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbf{Z}.$

На практике промежутки знакопостоянства и монотонности синуса и косинуса указывают по четвертям.

Примеры

- $y = \sin 3x.$

Наименьший положительный период $T = \frac{2\pi}{3}.$

Действительно,

$$\sin 3\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x \pm 2\pi) =$$

$= \sin 3x$ для любого значения x;

- $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$

Наименьший положительный период $T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

Действительно,

$$\cos\left(2(x \pm \pi) - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos\left((2x \pm 2\pi) - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \pm 2\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

шее) значение синус и косинус принимают в точках, отстоящих друг от друга на 2π. Поэтому положительный период не может быть меньше этого числа.

Если функция $y = f(x)$ периодична с основным периодом T, то для ее исследования достаточно рассмотреть любой промежуток длины T. При этом один из двух концов этого промежутка следует исключить, чтобы не рассматривать дважды значения функции, совпадающие на его концах.

Если определены нули синуса и косинуса на промежутке $[0;\ 2\pi)$, то этого достаточно, чтобы указать *все* их нули:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi;\ x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Почему выполняются указанные свойства синуса и косинуса и какие новые следствия можно вывести из них?

Основные свойства синуса и косинуса являются непосредственными следствиями вращательного движения точки. Все они легко объясняются с помощью тригонометрического круга.

Из стандартных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ можно строить новые тригонометрические функции и исследовать их свойства, следя за тем, как меняются свойства синуса и косинуса при выполняемых преобразованиях. Отметим важнейшие среди них.

1. *Переход к кратному аргументу.*

Рассмотрим функции $y = \sin kx$ и $y = \cos kx$ (k — любое положительное число). При этом преобразовании меняется основной период. Так как $\sin(kx + 2\pi) = \sin kx$, то $\sin k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = \sin kx$. Отсюда следует, что *основной период этой функции* равен $\frac{2\pi}{k}$. В частности, основной период функции $y = \sin 2x$ равен π, а функции $y = \sin\frac{x}{2}$ — 4π.

Аналогичное рассуждение верно и для косинуса.

2. *Деление — переход к тангенсу и котангенсу.* Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ получаются из синуса и косинуса.

Основные свойства функций $\operatorname{tg} x$ ***и*** $\operatorname{ctg} x$.

1. *Область определения*: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ для тангенса; $x \neq k\pi$ для котангенса.

2. *Периодичность*: функции периодичны с основным периодом $T = \pi$.

3. *Симметрия*: $\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

4. *Обращение в нуль*: тангенс обращается в нуль при $x = k\pi$; котангенс — при $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

5. *Сохранение знака*: положительны в I и III четвертях; отрицательны во II и IV четвертях.

6. *Наименьшее и наибольшее значения*: не имеют.

7. *Промежутки монотонности*: тангенс возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, котангенс убывает на промежутке $(0; \pi)$ и далее по периодичности.

8. *Область значений*: область действительных чисел $\mathbf{R}$.

График функции $y = \operatorname{tg} x$

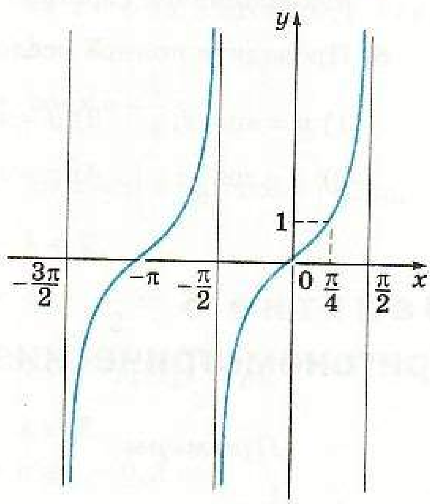
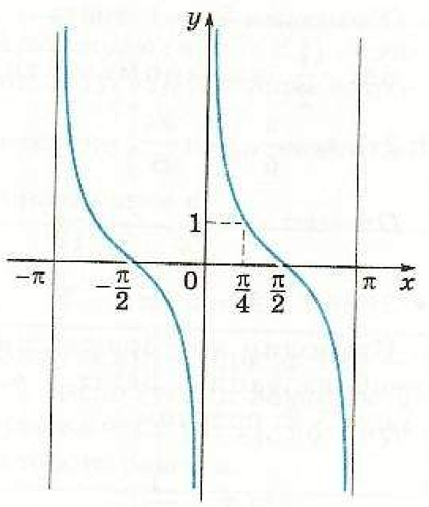


График функции $y = \operatorname{ctg} x$



Вопросы и упражнения

1. Как получить свойства косинуса, зная свойства синуса и пользуясь соотношением $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$?

2. Почему для записи промежутков знакопостоянства и промежутков монотонности синуса и косинуса удобнее выбирать разные промежутки основного периода?

3. Как обосновать возрастание функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, используя определение этой функции и свойства синуса и косинуса?

4. Как доказать, что основной период тангенса и котангенса вдвое меньше основного периода синуса и косинуса?

5. Сколько раз принимает каждое свое значение тангенс или котангенс в пределах основного периода?

6. Проведите полное исследование и постройте графики следующих функций:

1) $y = \sin 4x$; 3) $y = \sin x + \cos x$; 5) $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; 7) $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

2) $y = \cos\frac{x}{3}$; 4) $y = \sin^2 x$; 6) $y = -\operatorname{tg}2x$; 8) $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Занятие 5
Тригонометрические уравнения

Примеры

• $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Основной период

$T = \pi$.

Обозначим $2x = t$, тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi)$, $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{12}$, $x_2 = \frac{5\pi}{12}$;

• $2(\sin x - 2) = 5\sin x - 3$.

Проводим алгебраические преобразования: $2\sin x - 4 = 5\sin x - 3$; получим

$$\sin x = -\frac{1}{3}.$$

Наименьший положительный период T для $\sin x$ равен 2π.

Решаем уравнение на промежутке $[0; 2\pi)$:

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arcsin\frac{1}{3};$$

$$x_2 = \pi + \arcsin\frac{1}{3}.$$

Ответ:

$-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$;

$\arcsin\frac{1}{3} + \pi(1 + 2n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$;

Что полезно иметь в виду при решении тригонометрических уравнений?

1. *В тригонометрическое уравнение входят периодические функции.* Поэтому перед решением уравнения полезно определить общий период всех входящих в уравнение функций и затем искать корни на промежутке длиной, равной периоду.

Найдя эти корни и зная период T, ответ можно записать в виде $x = x_i + kT$, где x_i — корни уравнения на промежутке длины T; k — произвольное целое число.

2. *Решение уравнения* обычно состоит из двух частей — алгебраических преобразований, приводящих уравнения к стандартным, и записи решений стандартных уравнений.

Под стандартным тригонометрическим уравнением понимается уравнение вида $f(kx) = a$, где f — одна из основных тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс или котангенс).

3. *Запись решения стандартного уравнения.*

1) $\sin x = a$; $\cos x = a$.

Областью значений синуса и косинуса является промежуток $[-1; 1]$, поэтому при $|a| > 1$ данные уравнения решений не имеют.

Далее полезно помнить корни при $a = 0$; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; ± 1.

На промежутке $[0; 2\pi)$ решения уравнений при этих значениях параметра хорошо известны:

$\sin x$	x_1	x_2	$\cos x$	x_1	x_2
0	0	π	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$		1	0	

При решении уравнений с отрицательным значением параметра можно применять соображения симметрии: если x — решение уравнения $\sin x = a$, то $-x$ — решение уравнения $\sin x = -a$; аналогично, если x — решение уравнения $\cos x = a$, то $\pi - x$ — решение уравнения $\cos x = -a$.

Если a не соответствует ни одному из «знаменитых» углов, то вводят обозначение для одного из решений уравнения $\sin x = a$ или $\cos x = a$.

Пусть $|a| \le 1$. Тогда уравнение $\sin x = a$ имеет единственное решение в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Его обозначают через $\arcsin a$ (арксинус a).

Аналогично для косинуса выбирают промежуток $[0; \pi]$ и обозначают единственное решение уравнения $\cos x = a$ в этом промежутке через $\arccos a$ (арккосинус a).

С помощью аркфункций можно записать общий вид решений уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$. Традиционно это делают в следующей компактной форме:

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$
$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

2) $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Тангенс и котангенс могут принимать любые значения и в пределах основного периода принимают такое значение ровно один

- $\sin x = 0{,}1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = (-1)^k \times \arcsin 0{,}1 + k\pi$,
  $k \in \mathbf{Z}$.
- $\cos x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$,
  $k \in \mathbf{Z}$.
- $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$,
  $k \in \mathbf{Z}$.
- $\operatorname{ctg} x = 0{,}2 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} 0{,}2 + k\pi$,
  $k \in \mathbf{Z}$.

Арксинус a (при $|a| \le 1$) — это число (угол), лежащее в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Арккосинус a (при $|a| \le 1$) — это число (угол), лежащее в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Значения арксинусов и арккосинусов

- $\arcsin 0 = 0$;
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;
- $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;
- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$;
- $\arccos 1 = 0$;
- $\arccos(-1) = \pi$;
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Значения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ для «знаменитых» углов

x	$\operatorname{tg} x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	—

x	$\operatorname{ctg} x$
0	—
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\frac{\pi}{2}$	0

Примеры тригонометрических неравенств

- $\sin x > 0$;
- $\cos x < -\frac{1}{2}$;
- $\operatorname{tg} 2x \geq 1$;
- $\operatorname{ctg} x = -1$.

Примеры

1. $2\sin x + \cos x = 2$.

Если в этом уравнении заменить косинус на синус или наоборот, то получим уравнение с радикалами. Чтобы избежать этого, используем формулы, выражающие синус и косинус через тангенс половинного угла:

раз. Выберем в качестве основного промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ для тангенса и $(0; \pi)$ для котангенса.

Значения тангенса и котангенса для «знаменитых» углов известны, поэтому можно легко записать решения этих уравнений при $a = 0;\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3};\ \pm 1;\ \pm\sqrt{3}$. В общем виде вводят обозначения $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$ (арктангенс и арккотангенс) для чисел, лежащих в промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $(0; \pi)$ соответственно, тангенс или котангенс которых равен a.

Окончательно общий вид решений можно записать так:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$
$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

4. *Алгебраические преобразования* тригонометрических уравнений, приводящие их к стандартным, мы обсудим на примерах, показывая, как решаются уравнения некоторых типов.

5. *Тригонометрические неравенства* встречаются достаточно редко. Их надо решать в пределах основного периода, используя график или тригонометрический круг и записывая затем (при необходимости) общий вид решений.

Как решаются основные типы тригонометрических уравнений и неравенств?

1. *Уравнения, алгебраические относительно одной из тригонометрических функций:*

1) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Его корни: $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -2$. Второе из полученных простейших уравнений не имеет решений, так как $|\sin x| \leq 1$, решения первого можно записать так: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Если в уравнении встречаются разные тригонометрические функции, то надо попытаться привести их к одной, используя тригонометрические тождества;

2) $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$.

Так как квадрат синуса легко выражается через косинус, то, заменив $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$ и приводя уравнение к квадратному относительно $\cos x$, получим $2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x - 5 = 0$, т. е. квадратное уравнение $2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$, корни которого $\cos x = -1$, $\cos x = -\frac{3}{2}$. Уравнение $\cos x = -\frac{3}{2}$ решений не имеет. Решения уравнения $\cos x = -1$ запишем в виде $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

2. *Понижение порядка уравнения.* Формулы удвоения позволяют квадраты синуса, косинуса и их произведения заменять линейными функциями от синуса и косинуса двойного угла и таким образом понижать порядок уравнения:

1) $\cos 2x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$.

Можно заменить $\cos 2x$ на $2\cos^2 x - 1$ и получить квадратное уравнение относительно $\cos x$, но проще заменить $\cos^2 x$ на $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и получить линейное уравнение относительно $\cos 2x$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{65}{81}$.

Подставляя вместо $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ их выражения через $\cos 2x$, получаем

$$\frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2 = \frac{65}{81},$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = 4 \cdot \frac{65}{81},$$

$$\cos^2 2x = 2 \cdot \frac{65}{81} - 1,\ \cos^2 2x = \frac{49}{81},$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\text{и } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Выполнив замену, получим уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right).$$

Квадратное уравнение $3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$ имеет корни $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, откуда $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Исходное уравнение можно решить другим способом. Введем вспомогательный угол:

$$2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right).$$

Пусть $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда можно продолжить преобразование: $2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\sin(x + \alpha)$. Получаем простейшее уравнение $\sqrt{5}\sin(x + \alpha) = 2$, т. е. $\sin(x + \alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, откуда

$$x + \alpha = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2k\pi,$$

или

$$x + \alpha = \pi - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2k\pi.$$

Ответ получился в другом виде, однако можно проверить, что решения на самом деле совпадают.

2. $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$.

Заменив $\operatorname{ctg} x$ на $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ и приведя выражение к общему знаменателю, получим квадратное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0,$$

корни которого $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = 3$, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 4$.

Заменив 4 на $4(\sin^2 x + \cos^2 x)$, получим

$$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0.$$

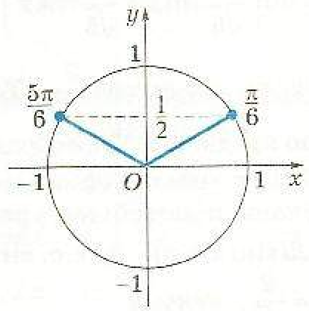
После почленного деления на $\cos^2 x$ имеем:

$$\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0,\ \operatorname{tg} x = 1,\ \operatorname{tg} x = -4,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} 4 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

4. $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$.

Отмечаем углы на окружности:



Для $x \in [0;\ 2\pi]$ имеем

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

5. $\cos x \geq \dfrac{1}{3}$.

$$\cos 2x = \pm\frac{7}{9},\ 2x = \pm\arccos\frac{7}{9} + k\pi,$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{9} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

3. *Использование тригонометрических формул сложения и следствий из них.* Иногда в уравнениях встречаются тригонометрические функции кратных углов. В таких случаях нужно использовать формулы сложения:

1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Объединим крайние слагаемые: $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$, откуда $2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0$, $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$. Тогда $\sin 2x = 0$, $2x = k\pi$, $x = \dfrac{1}{2}k\pi$ или $2\cos x = -1$, $x = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $\sin 3x \sin 5x = \sin x \sin 7x$.

Преобразуем произведение синусов в сумму: $\dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = \dfrac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x)$, откуда $\cos 2x = \cos 6x$. Полученное уравнение можно решить, например, преобразованием $\cos 6x - \cos 2x$ в произведение. Удобнее воспользоваться условием равенства косинусов двух углов $2x$ и $6x$: $6x = \pm 2x + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Получаем два уравнения: $6x = 2x + 2\pi k$, $4x = 2\pi k$, $x = \dfrac{1}{2}k\pi$ или $6x = -2x + 2k\pi$, $8x = 2k\pi$, $x = \dfrac{1}{4}k\pi$.

Проверьте, что решения второй серии содержат в себе все решения первой серии. Учитывая это, ответ можно записать короче: $x = \dfrac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. *Однородные уравнения*. Рассмотрим уравнение $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$. Если считать, что $\sin x$ и $\cos x$ — члены первой степени, то каждое слагаемое имеет степень 2.

> Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и ту же степень, называется *однородным*.

Его можно решить, выполнив деление на старшую степень синуса (или косинуса). Делим уравнение почленно на $\cos^2 x$ (*заметим*: если в данное уравнение подставить $\cos x = 0$, то получим $\sin x = 0$, что невозможно, значит, в результате деления на $\cos^2 x$ не будет потери корней) и находим:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{\sin x}{\cos x} + 6 = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0,\ \operatorname{tg} x = 2,\ \operatorname{tg} x = 3,$$

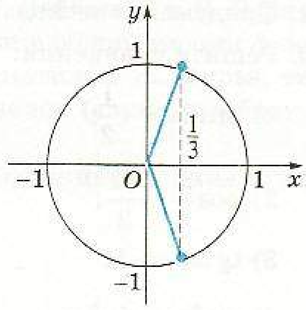
$$x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi,\ x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Постоянные слагаемые можно считать членами второй степени, так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

5. *Простейшие тригонометрические неравенства.* С помощью введенных обозначений $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$ легко записать решения простейших тригонометрических неравенств, т. е. неравенств вида $\sin x \le a$, $\cos x \le a$, $\operatorname{tg} x \le a$ и им подобных.

Для решения таких неравенств необходимо выделить на тригонометрической окружности положения точек P_x, соответствующих данному неравенству, а затем записать неравенства, которым удовлетворяют получившиеся углы. При этом надо следить, чтобы в записи левый конец интервала был меньше правого.

Отмечаем углы на окружности:



Для $x \in [-\pi; \pi]$ имеем

$$-\arccos\frac{1}{3} \le x \le \arccos\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[-\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi;\ \arccos\frac{1}{3} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

6. $\operatorname{tg} x \le -2$.

$\operatorname{tg} x = -2,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} 2.$

Для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем

$$-\frac{\pi}{2} < x \le -\operatorname{arctg} 2.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ -\operatorname{arctg} 2 + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вопросы и упражнения

1. Что такое $\arcsin a$?
2. Какие тождества для арксинуса вам известны?
3. При каких a определен $\arcsin a$?
4. Какие значения может принимать $\arcsin a$?
5. Сформулируйте вопросы, аналогичные вопросам 1—4, для $\arccos a$ и $\operatorname{arctg} a$ и дайте на них ответы.
6. Сколько решений имеют простейшие уравнения типа $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$?
7. Как, зная одно решение простейшего тригонометрического уравнения, найти все его решения?

8. Какими формулами выгоднее пользоваться при решении тригонометрических уравнений и почему?

9. Придумайте несколько различных способов решения уравнения $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

10. Решите уравнения:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$;
2) $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\operatorname{tg} 3x = -1$;
4) $\cos^2 x = \sin^2 x$;
5) $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{10}{3}$;
6) $\sin^2 2x = \sin^2 x$;
7) $(\sin x + \cos x)^2 = 2$;
8) $\sin x + \sin 2x = 0$;
9) $\sin x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$;
10) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

БЕСЕДА

Исторические сведения

Тригонометрия возникла и развивалась как часть астрономии. Поэтому историю тригонометрии проследить до истоков невозможно, ведь за движением небесных тел люди наблюдали всегда. Как с имени Евклида можно начать отсчет развития геометрии, так и исходную точку в описании астрономии и тригонометрии разумно связать с именем Птолемея (ок. 90 — ок. 160).

Клавдий Птолемей был одним из блестящих древнегреческих мыслителей. Его описание Солнечной системы в течение четырнадцати веков, вплоть до открытий Коперника, было общепринятой системой устройства Вселенной. Как «Начала» Евклида заключали в себе свод математических знаний, приобретенных человечеством, так и «Альмагест» Птолемея представлял собой исходную энциклопедию астрономии.

Астрономические таблицы Птолемея, сохранившиеся до нашего времени, равнозначны тригонометрическим таблицам, позволяющим вычислять синусы с шагом $0{,}25^\circ$ с пятью верными десятичными знаками. Для построения таблиц Птолемею пришлось не только применить сложившуюся к тому времени евклидову геометрию, но и доказать много новых фактов.

Если с именем Декарта мы связываем включение геометрии евклидовых «Начал» в общий контекст математики, то аналогичную роль для тригонометрии птолемеева «Альмагеста» сыграл немецкий математик и астроном И. Мюллер (1436 — 1476), более известный под именем Региомонтан. Его труд «О треугольниках всех видов» содержал таблицы синусов с шагом $1'$ с точностью до семи десятичных знаков.

Тригонометрические функции

Корни, степени и логарифмы, до тех пор пока они служат для формул, преобразований и вычислений, мы относим к алгебре. Точно так же синусы и косинусы со всем калейдоскопом тригонометрических формул можно отнести к этому разделу математики. Новый этап в развитии и применении всех этих понятий наступает тогда, когда мы изучаем изменение их значений при изменении аргумента (числа или угла). Зная, как вычисляют синус, косинус, тангенс, котангенс для произвольного числа, можно построить соответствующие функции и изучать их свойства по общим правилам исследования функций. Так же и в истории тригонометрии на смену алгебре тригонометрических формул и преобразований пришел математический анализ тригонометрических функций. Начиная с основополагающих работ И. Ньютона, Г. Лейбница и И. Бернулли, выполненных к началу XVIII в., роль тригонометрии в общей теории функции была прояснена в начале XIX в. французским математиком Ж. Фурье, теория которого лежит в основе принципов передачи сигналов (звука, изображения и т. п.) вплоть до наших дней.

Современный вид учение о тригонометрических функциях приняло в работах Леонарда Эйлера.

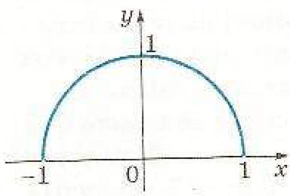
ГЛАВА 7

Функции и графики

Занятие 1
Обзор общих понятий

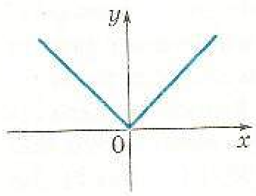
Примеры

1. $y = \sqrt{1 - x^2}$



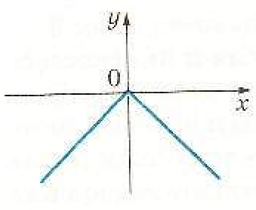
$D = [-1;\ 1]$
$E = [0;\ 1]$

2. $y = |x|$



$D = \mathbf{R}$
$E = [0;\ +\infty)$

3. $y = -|x|$



$D = \mathbf{R}$
$E = (-\infty;\ 0]$

Что включает в себя понятие функции?

1. *Задание функции.* Для того чтобы задать функцию, нужно указать:

1) множество всех возможных значений переменной x. Это множество обозначают буквой D и называют *областью определения функции*;

2) правило, по которому каждому числу x из множества D сопоставляется число y, определяемое числом x. Это число y называется *значением функции в точке* x.

2. *Функциональные обозначения.* Функция обычно обозначается одной буквой, например f. Значение функции f в точке x обозначается $f(x)$.

Итак, если задана функция f, то задано множество чисел D и каждому числу $x \in D$ сопоставлено число $y = f(x)$. Область определения функции f будем обозначать $D(f)$.

Переменную x называют *аргументом*, D — множеством возможных значений аргумента.

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$. Множество значений, которые принимает переменная y, так и называют — *множество значений функции*. Это множество будем обозначать $E(f)$ или просто E.

Можно сказать, что число a входит в множество значений функции f, если найдется число x из области определения функции такое, что $a = f(x)$.

Обратим внимание на то, что если для значения аргумента x из области определения соответствующее значение функции $y = f(x)$ находится однозначно, т.е. единственным образом, то для значения аргумента y из множества значений соответствующее значение x должно существовать, но оно не обязательно является единственным.

3. *График функции.* Графиком функции f называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, где x пробегает область определения функции f.

Заметим, что понятие графика функции тесно связано с понятием системы координат. Одна и та же функция в разных системах координат будет иметь разные графики.

4. *Способы задания функции.* Как задается правило вычисления значений функции?

1) *Аналитический способ.* При аналитическом способе задания функции правило вычисления задается явной формулой, содержащей определенные операции.

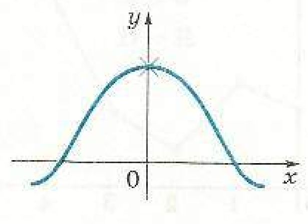
Если функция задана формулой и не указаны никакие ограничения, то ее областью определения считается множество всех значений аргумента, при которых выполнимы все операции, участвующие в формуле. Это множество называют естественной областью определения данной функции.

2) *Табличный способ.* В таблице можно непосредственно указать значения функции, однако лишь для конечного набора значений аргумента.

Вычисление значений функции может быть запрограммировано в калькуляторе. Вычислительное устройство может служить способом задания новой функции. Современные вычислительные машины снабжены клавишами, позволяющими немедленно вычислить значения многих функций.

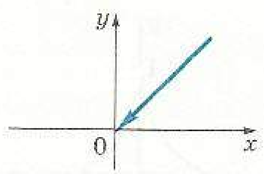
3) *Графический способ.* По графику можно находить (хотя бы приближенно) значения функции. Графический способ применяется прежде всего для качественного, наглядного представления характера изменения изучаемой функции.

4. $y = \dfrac{\sin x}{x}$



D: $x \neq 0$

5. $y = 2^{\log_2 x}$

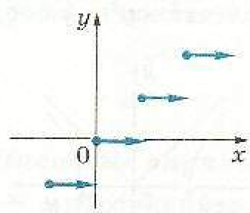


D: $x > 0$

$E = (0; +\infty)$

6. $y = [x]$

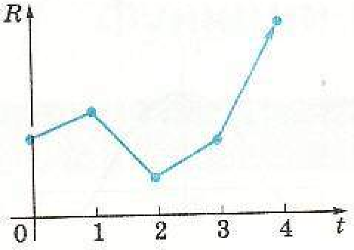
$[x]$ — целая часть числа x



$D = \mathbf{R}$

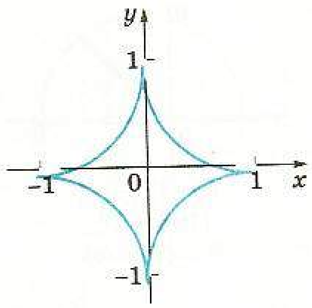
$E = \mathbf{Z}$

7. График изменения курса доллара



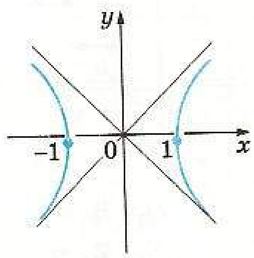
8. Астроида

$$|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=1$$



9. Гипербола

$$x^2-y^2=1$$



Аналитический, табличный и графический способы задания функции, разумеется, не исчерпывают все возможные пути описания функции.

Задание правила, по которому происходит вычисление значений функции, может быть выполнено с использованием любого языка — обычного словесного, символического, компьютерного. При этом необходимо следить за тем, чтобы это описание позволяло точно для каждого допустимого значения аргумента однозначно находить сопоставляемые им значения зависимой переменной (функции).

5. *Общее понятие зависимости.* Функция — это определенный тип зависимости между переменными, который так часто и называют *функциональной зависимостью.*

Термин «*переменная*» применяется для обозначения различных меняющихся величин.

Зависимость между переменными может быть выражена разными способами, лишь бы для любого набора значений переменных можно было бы ответить на вопрос: связаны ли эти значения данной зависимостью или нет? Часто встречается зависимость в форме уравнения, связывающая выражения с переменными.

Пусть дана некоторая зависимость между переменными x и y.

Будем говорить, что y есть функция от x, если для каждого допустимого значения x зависимость позволяет *однозначно* определить связанное с ним значение y.

Если зависимость задана в форме уравнения, связывающего выражения с переменными, то говорят о *неявном* задании функции. В отдельных случаях возможен переход от неявного задания функции к явному.

Зависимость между переменными x и y изображается на координатной плоскости с помощью некоторой кривой — графика зависимости. Для того чтобы эта зависимость неявно задавала y как функцию от x, нужно, чтобы всякая прямая, параллельная оси y, пересекала график не более чем в одной точке.

Как были заданы функции, которые встречались ранее?

1. *Линейные функции.*

Эти функции задаются формулой $y = kx + b$, где k и b — определенные числа.

Обычно считают, что $k \neq 0$.

При $k = 0$ функция $y = b$ является постоянной.

Областью определения функции $y = kx + b$ считается вся числовая ось: $D = \mathbf{R}$ (если не наложено специальных ограничений на значение аргумента x).

2. *Многочленные функции.*

Эти функции задаются следующими многочленами: $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$.

Линейные функции входят в этот класс функций.

Многочленные функции можно различать по степени многочлена: квадратичные ($n = 2$), кубические ($n = 3$) и т.д.

Естественной областью определения многочленных функций считается вся числовая ось: $D = \mathbf{R}$.

3. *Рациональные функции.*

Эти функции задаются отношениями двух многочленов: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Многочленные функции входят в этот класс функций, так как в виде $Q(x)$ можно взять постоянную $Q(x) = 1$.

Область определения рациональной функции — множество всех чисел x, за исключением тех, при которых знаменатель $Q(x)$ обращается в нуль: $D = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

4. *Степенные функции с дробным показателем.*

Эти функции задаются формулой вида $y = x^r$, где r — некоторое число, отличное от нуля.

Ясно, что если r — натуральное число, то получается частный случай многочленной функции; если r — целое отрицательное число, то имеем частный случай рациональной функции.

Линейные функции

$$y = kx + b$$
$$k \neq 0$$
$$D = \mathbf{R}$$

Многочленные функции

- квадратичные ($n = 2$)
$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$D = \mathbf{R}$$
- кубические ($n = 3$)
$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$D = \mathbf{R}$$

Рациональные функции

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$; $Q(x)$ — многочлены.

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

Степенные функции с дробным показателем

$$y = x^r$$
$$r \neq 0$$

Частные случаи:

$r = \mathbf{N}$ — многочленная функция;

$r \in \mathbf{Z}_-$ — рациональная функция

Тригонометрические функции

$y = \sin x$, $y = \cos x$

$D = R$

Показательные функции

$y = a^x$

$a > 0$; $a \neq 1$

Логарифмические функции

$y = \log_a x$

$a > 0$; $a \neq 1$

Если r — дробное число, то можно вычислить значение степени x^r при любом положительном значении x, что позволяет рассмотреть степенные функции не только с целым, но и любым действительным показателем $r \neq 0$.

5. *Основные тригонометрические функции.*

Это функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$, определенные при всех значениях аргумента x.

6. *Показательные и логарифмические функции.*

При фиксированном основании a ($a > 0$; $a \neq 1$) эти функции задаются формулами $y = a^x$ и $y = \log_a x$.

Показательные функции определены при всех значениях x, а логарифмические — только при $x > 0$.

Вопросы и упражнения

1. Какие вам известны способы задания функции?
2. Что такое область определения функции?
3. Как находится область определения функции, заданной формулой?
4. Как вычисляются значения функции, заданной графиком?
5. Какие классы функций вам известны?
6. Что такое неявное задание функции?
7. Всегда ли зависимость между двумя переменными позволяет выразить одну из них как функцию другой?
8. Как по графику зависимости определить, можно ли из этой зависимости выразить одну переменную как функцию от другой?
9. Приведите пример функции, естественной областью определения которой было бы следующее числовое множество:

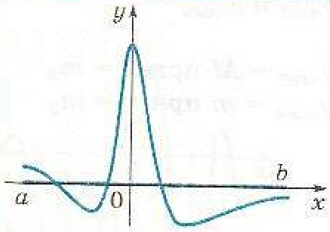
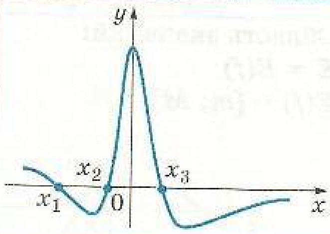
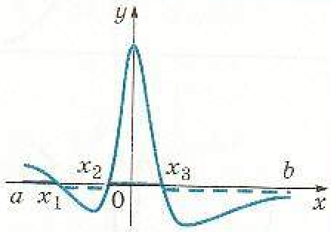
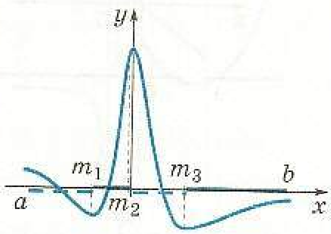
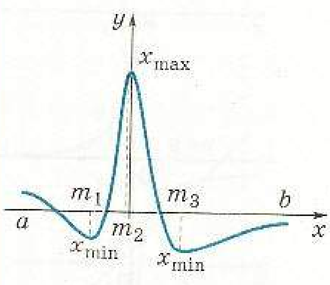
   1) $x \neq \pm 1$;
   2) $x \geq 1$;
   3) $[-2; 2]$;
   4) $(-\infty; 1)$;
   5) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
   6) $[-1; 0) \cup (1; 2]$.

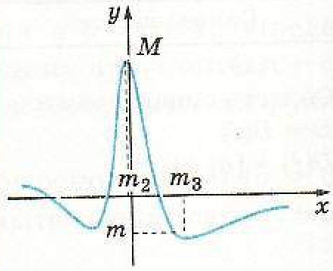
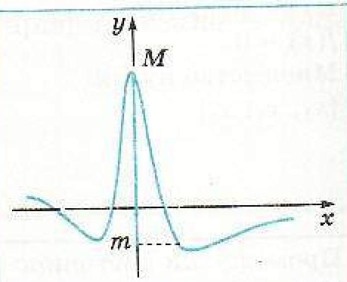
10. Верны ли следующие утверждения:

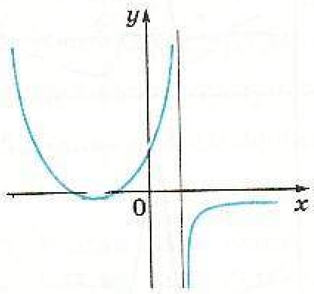
    1) соотношения $y^2 = x^2$, $y \geq 0$ и $y = |x|$ определяют одну и ту же зависимость;
    2) соотношение $y^2 = x$ определяет ровно две функции вида $y = f(x)$.

Занятие 2
Схема исследования функции

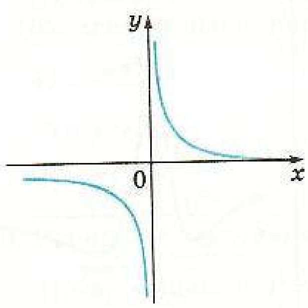
Что входит в схему исследования функции?

Способ представления функции		
Символический	Словесный	Графический
$y = f(x)$ Область определения: $D = D(f)$ $D(f) = [a; b]$	Область определения функции — множество значений аргумента, при которых функция задана, определена. Геометрически — это проекция графика функции на ось x	
Нули функции: $f(x) = 0$ Множество нулей: $\{x_1, x_2, x_3\}$	Нули функции — точки, в которых функция обращается в нуль. Эти точки являются решениями уравнения $f(x) = 0$. Геометрически — это абсциссы точек пересечения графика функции с осью x	
Промежутки постоянного знака: $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ $f(x) > 0$: $[a; x_1) \cup (x_2; x_3)$ $f(x) < 0$: $(x_1; x_2) \cup (x_3; b]$	Промежутки постоянного знака — множества решений неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$. Геометрически — это интервалы оси x, соответствующие точкам графика, лежащим выше (или ниже) этой оси	
Промежутки монотонности: $f(x)\uparrow$ или $f(x)\downarrow$ $f(x)\uparrow$: $[m_1; m_2] \cup [m_3; b]$ $f(x)\downarrow$: $[a; m_1] \cup [m_2; m_3]$	Промежутки монотонности — промежутки оси x, на которых функция возрастает (промежутки возрастания) или убывает (промежутки убывания). Геометрически — это интервалы оси x, где график функции идет вверх или вниз	
Точки экстремума: x_{max} и x_{min} x_{max}: m_2 x_{min}: m_1, m_3	Точки экстремума — точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значения по сравнению со значениями в близких точках. Геометрически — около точек экстремума график функции выгибается выпуклостью вверх или вниз	

Способ представления функции		
Символический	Словесный	Графический
	Обычно точки экстремума разделяют промежутки монотонности	
Наибольшее и наименьшее значения: $y_{\text{наиб}}$ и $y_{\text{наим}}$ $y_{\text{наиб}} = M$ при $x = m_2$ $y_{\text{наим}} = m$ при $x = m_3$	Говорят, что в точке x_0 функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение, если $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ для любого значения x. Само число $f(x_0)$ и называется наибольшим (наименьшим) значением функции. Геометрически — это ординаты самой высокой (самой низкой) точки графика	
Область значений: $E = E(f)$ $E(f) = [m;\ M]$	Область значений функции — множество чисел, состоящее из всех значений функции. Геометрически — это проекция графика функции на ось y	



а



б

Почему нужно быть внимательным при исследовании функции?

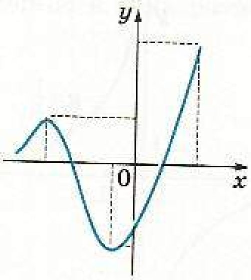
1. Связь между нулями функции и промежутками постоянного знака не всегда бывает такой простой, как на приведенном графике (в рассмотренном примере нули функции разделяли промежутки постоянного знака). Функция может обратиться в нуль, но иметь одинаковый знак слева и справа от корня (рис. *а*).

Не всегда верно и обратное — граница двух соседних промежутков постоянного знака не обязательно является корнем функции. Однако в этом случае график функции должен иметь *разрыв* (рис. *б*)

2. Мы применяем термин «монотонность» (возрастание, убывание) только по отношению к промежуткам, целиком входящим в область определения функции.

Так, функция на рисунке *б* убывает на каждом промежутке, не содержащем нуля, но нельзя сказать, что она убывает везде (на всей области определения).

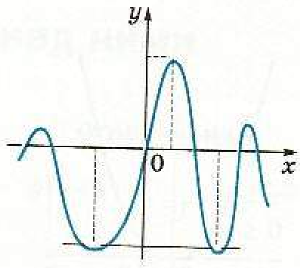
3. Точка экстремума (максимума, минимума) должна лежать *внутри* области определения функции (чтобы можно было сравнивать значения функции слева и справа от нее, рис. *в*).



в

Точка, в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, может находиться где угодно.

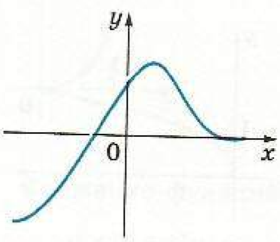
Как правило, это либо одна из точек экстремума, либо одна из граничных точек области определения (рис. *г*).



г

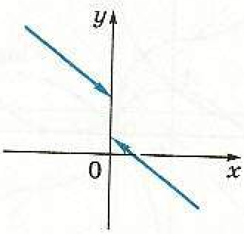
Замечание. Точек экстремума может быть сколько угодно.

Наибольшее (наименьшее) значение функции, если оно существует, всегда единственно, однако оно может приниматься в нескольких различных точках. Когда мы говорим *«точка экстремума»* или *«точка, в которой функция принимает наибольшее значение»*, то имеем в виду точки, расположенные на оси x, а не точки графика. Наибольшее (наименьшее) значение — это точка, расположенная на оси y.



д

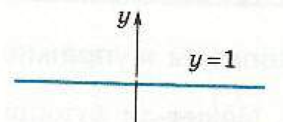
4. В рассмотренном примере областью значений функции был отрезок $[m;\ M]$, концы которого — наименьшее и наибольшее значения функции. Так бывает не всегда.



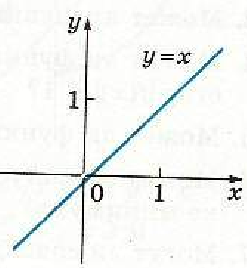
е

Во-первых, часто у функции нет наибольшего или наименьшего значения (рис. *д*).

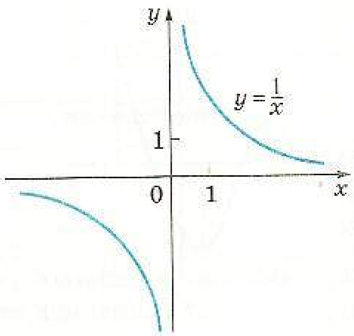
Во-вторых, если функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений, но является *разрывной*, то некоторые промежуточные точки между m и M могут пропускаться, т. е. не входить в область значений функции (рис. *е*).

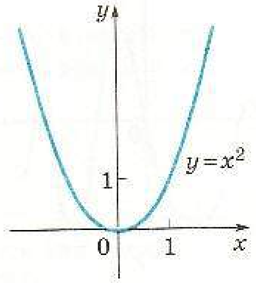


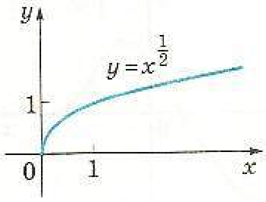
Как на практике используется схема исследования функции?

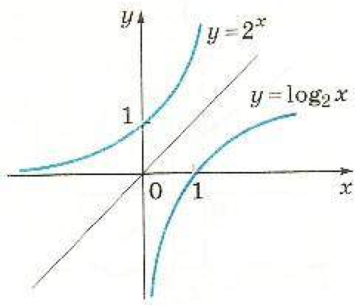


Исследование функций, заданных аналитически, можно свести к исследованию стандартных функций, зная, как меняются свойства при преобразовании функций и операциях над ними.









Преобразования функций будут изучены на отдельном занятии (см. занятие 3), а сейчас повторим основные свойства простейших функций с помощью их графиков.

1. $y = 1$ — постоянная функция. Ее график — прямая, параллельная оси x.

2. $y = x$ — линейная функция. Ее графиком будет биссектриса первого и третьего координатных углов.

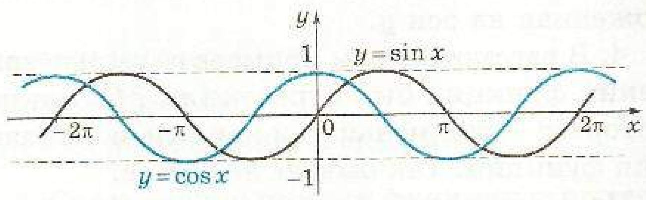
3. $y = \dfrac{1}{x}$ — обратно пропорциональная зависимость между значениями функции и значениями аргумента.

4. $y = x^2$ — квадратичная функция. Ее графиком будет парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси y.

5. $y = x^{\frac{1}{2}}$ — степенная функция. Ее график — ветвь параболы.

6. $y = 2^x$; $y = \log_2 x$ — показательная и логарифмическая функции. Они взаимно-обратны (см. занятие 3).

7. $y = \sin x$; $y = \cos x$ — основные тригонометрические функции. Их графики — синусоиды, различающиеся на $\pi/2$.



Вопросы и упражнения

1. Может ли функция $y = f(x)$ быть монотонной, а при этом уравнение $f(x) = 1$ иметь два корня?
2. Может ли функция принимать каждое свое значение ровно два раза?
3. Может ли функция иметь два максимума и ни одного минимума?
4. Может ли функция возрастать на всей числовой оси и удовлетворять неравенству $|f(x)| < 1$?
5. Может ли функция иметь максимум, но не иметь наибольшего значения?
6. Может ли значение функции в точке максимума быть меньше значения в точке минимума?
7. Могут ли совпадать наибольшее и наименьшее значения функции?

8. Может ли функция принимать свое наибольшее значение в двух разных точках?

9. Верны ли следующие утверждения:
   1) график функции $y = (x + 1)^2 - x^2$ — прямая;
   2) график функции $y = (x + 1)^2 - 1$ — гипербола;
   3) график функции $y = x^2 + (x + 1)^2$ — парабола?

Занятие 3
Преобразования функций и действия над ними

Что можно получить из стандартных функций, применяя действия над ними?

1. *Уменьшение области определения функции (ограничение).* У функции $y = f(x)$ с областью определения D можно уменьшить область определения, сохранив правило вычисления ее значений.

Такая операция называется *ограничением.*

Так, функцию $y = x^2$, заданную на всей числовой оси, можно рассмотреть только для неотрицательных значений аргумента и записать $y = x^2$, $x \geq 0$.

Если $A \subset D$, то ограничение функции f с областью определения D на подмножество A иногда обозначают так: $f|_A$.

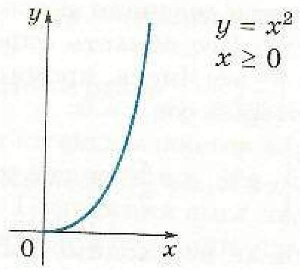
2. *Арифметические операции над функциями.* Функции с одной и той же областью определения можно складывать, перемножать и делить друг на друга по следующим правилам:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

При сложении и умножении функций область определения сохраняется. При делении из нее выбрасываются точки, в которых знаменатель обращается в нуль.

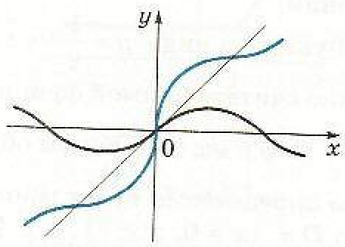
3. *Построение сложной функции (композиции функций).*

Ограничение

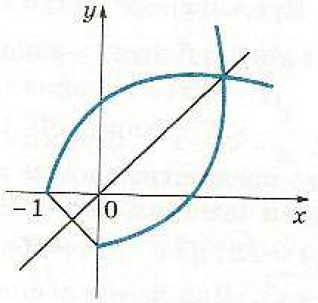


Сложение функций

$y = x + \sin x$



Взаимно-обратные функции



$y = \sqrt{x+1}$ и $y = x^2 - 1$; $x \geq 0$

Арифметические действия над функциями

Примеры

1. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. Эта функция получена из простейших с помощью арифметических операций. Ее область определения — все числа, кроме тех, для которых $x^2-1=0$. Для краткости область определения можно записать так: $D=\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq\pm1\}$ или проще D: $x\neq\pm1$.

2. $y=\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. Тангенс получается делением синуса на косинус. Его область определения — все числа, кроме тех, для которых $\cos x=0$;

$$D=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

3. Если необходимо выполнять арифметические операции над функциями, имеющими разные области определения, то берут общую часть областей определения.

Функцию вида $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x+1}$ можно считать суммой функций $y=\dfrac{1}{x}$ и $y=\sqrt{x+1}$. Общей областью определения будет множество $D=\{x\neq0,\ x\geq-1,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

Композиция двух функций

Примеры

1. Пусть $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$.

$$(f\circ g)(x)=f(\sin x)=\sin^2 x,$$
$$(g\circ f)(x)=\sin x^2.$$

2. $y=\sqrt{1-x^2}$. Функцию y можно представить в виде композиции функций: $g(x)=1-x^2$ и $f(x)=\sqrt{x}$, $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{1-x^2}$. Для нахождения области определения нужно взять значения x, для которых $1-x^2\geq0$, т. е. $D=[-1;1]$.

Композиция — это последовательное применение двух или нескольких функций.

Композиция функций f и g часто обозначается $f\circ g$. Она осуществляется по следующему правилу:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),$$

т. е. к значению аргумента x сначала применяют функцию g, а затем к ее значению $g(x)$ применяют функцию f.

Область определения композиции $f\circ g$ функций f и g находят так: берут те числа x из *области определения* функции g, для которых значения $g(x)$ попадают в область определения функции f.

4. *Построение обратной функции*. Пусть дана функция $y=f(x)$. Если из этого равенства можно однозначно выразить x через y: ($x=g(y)$), то получим новую функцию, которая называется *обратной к функции* f. Пару функций $y=f(x)$ и $x=g(y)$ называют взаимно-обратными функциями. Имеют место тождества $f(g(y))=y$ и $g(f(x))=x$.

Заметим, что зависимости $y=f(x)$ и $x=g(y)$ эквивалентны, выражают одну и ту же связь между переменными x и y.

Поэтому графики этих зависимостей в системе координат xOy будут совпадать.

Однако, если мы функцию g захотим записать в обычном виде $y=g(x)$ и построить ее график в той же системе координат, то мы перейдем от точки $(x;y)$ к точке $(y;x)$. Точки $(x;y)$ и $(y;x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y=x$. Поэтому графики взаимно-обратных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в одной и той же системе координат xOy будут симметричны относительно этой прямой.

Не для всякой функции $y=f(x)$ можно построить обратную.

Например, стандартные функции $y=x^2$ или $y=\sin x$ не имеют обратных.

Однако для каждой из них можно так уменьшить область определения, чтобы на ней выполнялось условие однозначности решения уравнения $y=f(x)$ при заданном значении y из области значений функции f.

Например, функция $y=\sqrt{x}$ является обратной к функции $y=x^2$, определенной при $x \ge 0$; функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, определенной на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. *Склеивание функций.* Часто встречаются функции, заданные разными формулами на разных частях области определения. Их можно представлять составленными (склеенными) из различных функций.

Например, функция $y = |x|$ склеена из функции $y = x$, взятой при $x \ge 0$ и $y = -x$ при $x < 0$.

Замечание. Часто функции, получаемые из простейших стандартных функций с помощью рассмотренных выше операций, называют *элементарными функциями.*

Почему полезно представлять функцию как результат действий над простейшими функциями?

Если научиться следить за тем, как меняются свойства функций при тех или иных действиях над ними, то это может облегчить исследование функций.

Обсудим, например, *монотонность функций.*

Сформулируем несколько правил.

1. Если каждая из двух функций возрастает на некотором промежутке, то и сумма этих функций возрастает на этом промежутке.

2. Если функция f возрастает на некотором промежутке, то функция $-f$ убывает на этом промежутке.

3. Если каждая из двух функций возрастает на некотором промежутке и положительна, то и произведение этих функций возрастает на этом промежутке.

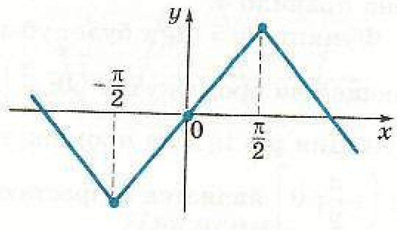
4. Если функция f возрастает на некотором промежутке и строго сохраняет на нем постоянный знак (не обращаясь в нуль), то функция $\frac{1}{f}$ убывает на этом промежутке.

Заметим, что $(g \circ f)(x) = 1 - \left(\sqrt{x}\right)^2 = 1 - x$.

Теперь $D = [0; +\infty)$.

3. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$.

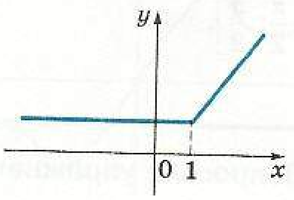
$$(f \circ g)(x) = \sin \arcsin x = x$$
$$D = \mathbf{R}$$
$$(g \circ f)(x) = \arcsin(\sin x)$$



$y = \arcsin(\sin x)$

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\arcsin x$ является обратной к функции $\sin x$. На отрезке $[-1; 1]$ функция $\sin x$ является обратной к функции $\arcsin x$.

Склеивание функций



$$y = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ x, & x \ge 1. \end{cases}$$

Монотонность функций

1. Функция $y = -\frac{1}{x}$ будет возрастающей на промежутке $(0; +\infty)$, так как функция $y = \frac{1}{x}$ является убывающей на этом промежутке.

2. Функция $y = 2x - \frac{1}{x}$ является возрастающей на промежутке $(-\infty; 0)$, так как получена как сумма двух функций $y = 2x$ и $y = -\frac{1}{x}$, каждая из которых возрастает на этом промежутке.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей на промежутке

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, так как она является произведением функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{\cos x}$, каждая из которых возрастает на этом промежутке. Для функции $y = \frac{1}{\cos x}$ применено правило 4.

Функция $y = -\operatorname{tg} x$ будет убывающей на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ является возрастающей. Применив правило 7, получим, что тангенс возрастает на всем промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Функция $y = \arcsin x$ возрастает на всей области определения (промежуток $[-1; 1]$), так как является обратной к возрастающей функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Если каждая из двух функций является возрастающей, то и их композиция будет возрастающей.

При использовании этого свойства надо следить за областями определения и теми промежутками, на которых исследуется монотонность.

6. Если функция возрастает на некотором промежутке, то и обратная к ней также будет возрастать на том промежутке, который является областью значений исходной функции.

7. Если функция склеена из двух функций, возрастающих на промежутках, имеющих общую точку, то она будет возрастающей на объединенном промежутке.

Все правила приведены для возрастающих функций.

Случай убывающих функций рассматривается аналогично.

Сформулированные правила доказываются с использованием арифметических свойств неравенств.

? Вопросы и упражнения

1. Докажите сформулированные правила о сохранении монотонности функций при операциях над ними.
2. Что такое композиция функций?
3. Как найти естественную область определения сложной функции?
4. Какие две функции называются взаимно-обратными?
5. При каком условии функция имеет обратную?
6. Является ли монотонность функции необходимым условием существования обратной функции?
7. Как связаны между собой свойства взаимно-обратных функций?
8. Как выразить через арксинус функцию, обратную к функции $y = \sin x$, заданной при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$?
9. Даны две функции f и g. Постройте их композиции $u = f \circ g$ и $v = g \circ f$:

   1) $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x^2 + 1$;

   2) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x \text{ при } x \ge 0; \end{cases}$ $g(x) = x^2 - 1$.
10. Докажите равенство $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Занятие 4
Симметрия функций и преобразование их графиков

Какие свойства симметрии возникают у функций и как они проявляются на графиках?

1. *Осевая симметрия. Четные функции.* Рассмотрим простейший случай, когда график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси ординат. Это означает, что ее область определения D симметрична относительно начала координат (точки x и $-x$ одновременно принадлежат или не принадлежат D) и что $f(-x) = f(x)$, т. е. точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси y.

Функции с такой симметрией графика называются *четными функциями*.

2. *Центральная симметрия. Нечетные функции.* Рассмотрим простейший случай, когда график функции $y = f(x)$ симметричен относительно начала координат. Это означает, что ее область определения D симметрична относительно начала координат (точки x и $-x$ одновременно принадлежат или не принадлежат D) и что $f(-x) = -f(x)$, т. е. точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно точки 0.

Функции с такой симметрией графика называются *нечетными функциями*.

Четность и нечетность функции может сохраняться при арифметических операциях:

1) сумма четных (нечетных) функций будет четной (нечетной) функцией;

2) произведение двух четных или двух нечетных функций будет четной функцией.

3. Произведение четной функции на нечетную будет нечетной функцией.

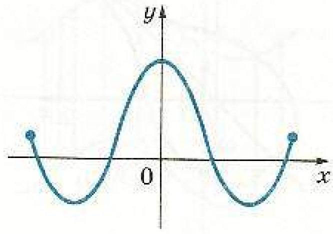
Примеры

1. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ — четная функция как сумма трех четных функций;

2. $y = x + \sin x$ — нечетная функция;

3. $y = \dfrac{\sin x}{x}$ — четная функция как произведение двух нечетных функций $y = \sin x$ и $y = \dfrac{1}{x}$.

Четная функция



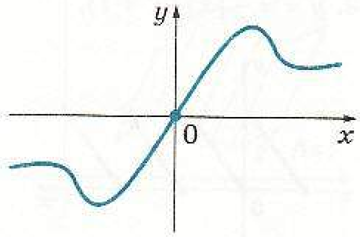
Примеры

1. $y = c$ (постоянная функция).

2. $y = x^2$.

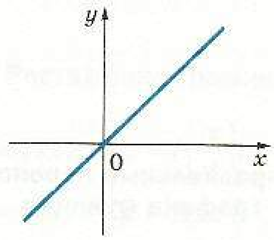
3. $y = \cos x$.

Нечетная функция

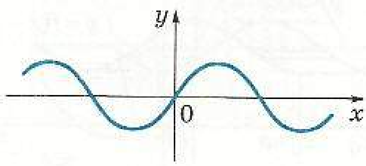


Примеры

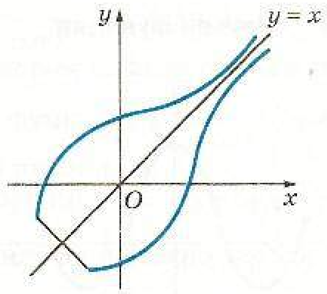
1. $y = x$.



2. $y = \sin x$.



Взаимно-обратные функции (симметрия относительно прямой $y = x$)

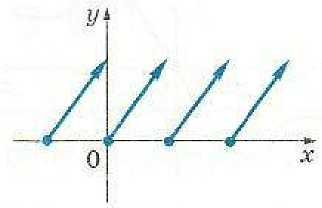


3. *Симметрия относительно прямой $y = x$. Графики взаимно-обратных функций.* Пусть задана функция $y = f(x)$, имеющая обратную. Напомним, это означает, что из равенства $y = f(x)$ можно x однозначно выразить через y: $x = g(y)$, где g будет функцией, обратной к функции f.

Периодичность функций

Примеры

1. $y = \sin x$, $y = \cos x$ $(T = 2\pi)$.
2. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ $(T = \pi)$.
3. $y = x - [x]$ $(T = 1)$.



4. $y = \arcsin(\sin x)$ $(T = 2\pi)$.

4. *Периодичность функции.* Самосовмещение при параллельном переносе. О периодических функциях мы говорили в гл. 6 (см. занятие 4) при рассмотрении тригонометрических функций. Напомним определение и основные свойства периодических функций. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что выполняется равенство $f(x) = f(x + T)$, верное при всех x.

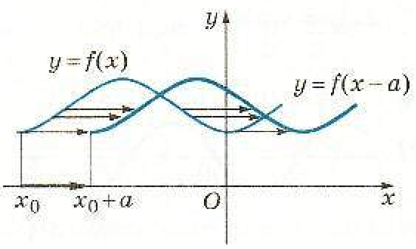
При этом предполагается, что при всяком допустимом значении x точки $x \pm T$ также входят в область определения функции.

Это, в частности, означает, что если T — период функции f, то и числа nT (n — натуральное число) являются ее периодами. Обычно можно выделить наименьший (положительный по определению) период функции, который называют главным, или основным, периодом. Периодическую функцию достаточно исследовать в пределах одного периода. Далее ее свойства будут периодически повторяться. График периодической функции не меняется при параллельном переносе вдоль оси x: $x \to x + T$.

Если T — общий период двух функций, то T остается периодом суммы, произведения и частного этих функций. Сумма периодических функций с разными периодами может быть как периодической, так и не быть таковой.

Параллельный перенос графика функции

$$y = f(x) \to y = f(x - a)$$



5. *Параллельный перенос графика.* Пусть известен график функции $y = f(x)$. Необходимо в этой же системе координат xOy построить график функции $y = g(x)$, где $g(x) = f(x - a) + b$. Сделаем параллельный перенос системы координат xOy.

Если перенести начало отсчета O в точку $O'(a;\ b)$, то новые координаты $(x';\ y')$ произвольной точки P будут связаны с прежними ее координатами $(x;\ y)$ формулами:

$x' = x - a$	$x = x' + a$
$y' = y - b$	$y = y' + b$

Чтобы не ошибиться в знаках, подставьте координаты точки O'. Ее прежние координаты $(x; y)$ должны быть $(a; b)$, а новые $(x'; y') = (0; 0)$.

Подставим в запись функции g новые переменные x' и y', т.е. заменим $x = x' + a$, $y = y' + b$. Получим $y' = f(x')$. Это означает, что график функции $y = g(x)$ в системе координат xOy совпадает с графиком функции $y' = f(x')$ в системе координат $x'O'y'$. Это подсказывает способ построения графика функции $y = g(x)$ — нужно выполнить параллельный перенос системы координат и в новой системе построить известный график функции $y = f(x)$.

В частных случаях, когда a или b равно нулю, происходит перемещение графика вдоль осей координат.

6. *Растяжение графика*. Пусть нам известен график функции $y = f(x)$, а мы хотим построить график функции $y = g(x)$, где $g(x) = kf\left(\frac{x}{l}\right)$, где $k > 0$, $l > 0$ — заданные числа.

Это преобразование связано с изменением масштаба, выбранного для осей координат. Введем новые координаты.

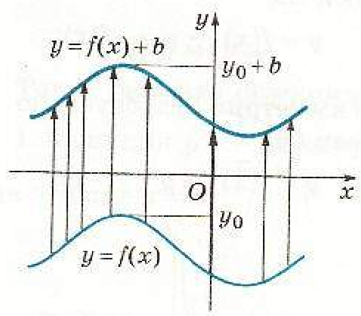
$x' = \frac{x}{l}$	$x = lx'$
$y' = \frac{y}{k}$	$y = ky'$

Как и в предыдущем случае, видим, что функция $y = g(x)$ при изменении переменных станет функцией $y' = f(x')$. Таким образом, для построения графика функции $y = kf\left(\frac{x}{l}\right)$ надо изменить масштаб по осям x и y и построить в новой системе координат график функции $y = f(x)$.

В частных случаях, когда k или l равно 1, происходит растяжение (сжатие) вдоль одной из координатных осей.

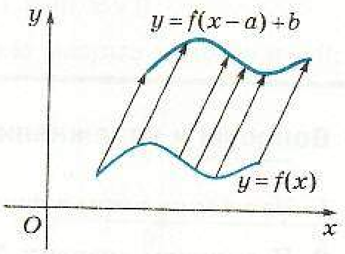
Параллельный перенос графика функции

$y = f(x) \to y = f(x) + b$



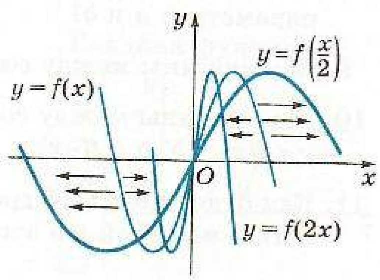
Параллельный перенос графика функции

$y = f(x) \to y = f(x - a) + b$



Растяжение графика

- $y = f(x) \to y = f\left(\frac{x}{2}\right)$;
- $y = f(x) \to y = f(2x)$.



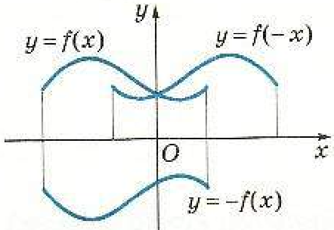
Симметрия относительно координатных осей

- симметрия относительно оси Ox

  $y = f(x) \to y = -f(x)$;

- симметрия относительно оси Oy

  $y = f(x) \to y = f(-x)$.



7. *Симметрия относительно координатных осей*. Переход от функции $y = f(x)$ к функции $y = f(-x)$ соответствует симметричному отражению графика относительно оси ординат. Заметим, что функция $y = f(-x)$ может иметь иную область определения, чем функция $y = f(x)$, если область определения функции f не симметрична относительно начала координат.

Аналогично переход от функции $y = f(x)$ к функции $y = -f(x)$ соответствует симметричному отражению графика относительно оси абсцисс, потому что так симметрично расположены точки $(x; y)$ и $(x; -y)$.

Пользуясь тремя типами преобразования графиков — параллельным переносом, растяжением (сжатием) вдоль осей координат и осевой симметрией, можно, исходя из графика функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(l(x - a)) + b$ при любых значениях параметров a, b, k и l.

? Вопросы и упражнения

1. Что такое четная функция?
2. При каком условии функция, заданная многочленом, является нечетной?
3. Какое требование предъявляется к области определения четной и нечетной функций?
4. Какая функция является периодической?
5. Приведите пример периодической функции.
6. Как будет перемещаться график функции $y = f(x - a)$ при изменении параметра a?
7. Как будет перемещаться график функции $y = f(x) + b$ при изменении параметра b?
8. Как будет перемещаться график функции $y = f(x - a) + b$ при изменении параметров a и b?
9. Как связаны между собой графики функций $y = f(x)$, $y = f(-x)$ и $y = -f(x)$?
10. Как связаны между собой области определения функций $y = f(x)$, $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(-x)$ и $y = -f(x)$?
11. Как будет меняться график функции $y = f(kx)$ при изменении параметра k? Ответьте на такой же вопрос для функции $y = kf(x)$.

Занятие 5
Непрерывность функции

Какие особенности функции могут встретиться при ее исследовании?

1. *Точка разрыва функции* — это точка, около которой значения функции совершают *скачок*. Точнее, точка x_0 называется *точкой разрыва* функции, если можно указать такое расстояние d, что сколь угодно близко к x_0 всегда найдутся точки, в которых значения функции расположены друг от друга на расстоянии, большем, чем d.

В первом примере *скачок* функции в точке разрыва *бесконечен*, во втором — *конечен*. Рациональные функции вида $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, имеют разрывы с бесконечным скачком в корнях знаменателя.

2. *Непрерывность функции на промежутке.* Функция называется *непрерывной* на некотором промежутке, если у нее нет на этом промежутке точек разрыва.

Понятие непрерывности функции соответствует представлению о непрерывности движения карандаша при изображении ее графика.

Рациональная функция непрерывна на любом промежутке, не содержащем корней ее знаменателя. В частности, график функции $f = P(x)$, где $P(x)$ — многочлен, непрерывен на всей числовой оси.

Функция называется *гладкой*, если в каждой точке ее графика можно однозначно провести *касательную*.

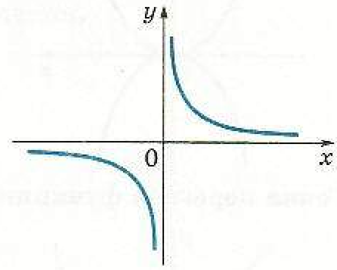
3. *Угловые точки.* Точки, в которых нарушается гладкость, распознаются на графике легко — это, разумеется, ее точки разрыва, а также *угловые точки*, типичным примером которых является точка $x = 0$ для функции $y = |x|$.

В школьной практике угловые точки связаны исключительно с вычислением модуля и появляются при построении графиков функций типа $y = |f(x)|$. В угловой точке сама функция остается непрерывной, однако нарушается не-

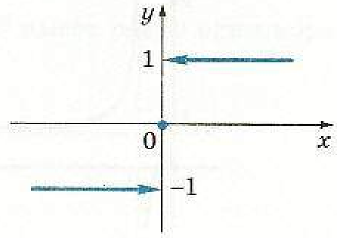
Примеры

Точка разрыва функции

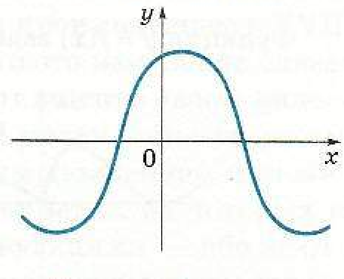
1. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ имеет разрыв в точке $x = 0$:



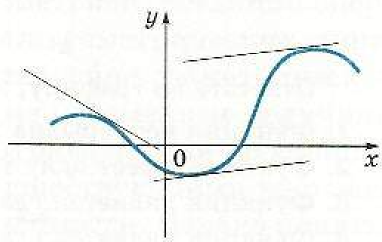
2. Функция $y = \sin x = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0; \\ 0 \text{ при } x = 0; \\ 1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 0$:



Непрерывность функции на промежутке



Гладкая функция

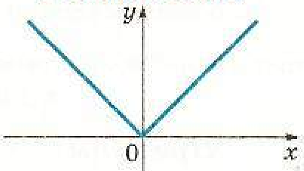


прерывность изменения касательной к графику. Можно сказать точнее, что в угловой точке угол наклона касательной имеет скачок.

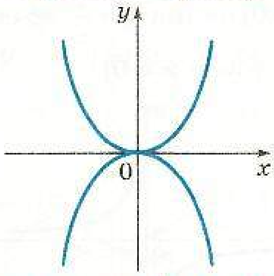
4. *Выпуклость функции.* Наглядным свойством графика функции на некотором промежутке является его *выпуклость*. Она может быть направлена как вверх (например, у функции $y = -x^2$), так и вниз ($y = x^2$). Точка, в которой меняется характер выпуклости, называется *точкой перегиба* функции. Вблизи нее график функции перегибается. Если в этой точке можно провести касательную, то видно, что по одну сторону от точки перегиба график функции начинает уходить выше касательной (в эту сторону график становится выпуклым вниз), а по другую сторону график уходит вниз (становится выпуклым вверх).

5. *Асимптота графика функции.* Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближаются точки графика функции при их удалении от начала координат. Асимптоты бывают вертикальные и наклонные. Вертикальные асимптоты могут появиться только тогда, когда функция имеет бесконечный разрыв, т. е. скачок функции в точке разрыва бесконечен. Наклонные асимптоты могут быть только в том случае, если область определения функции бесконечна.

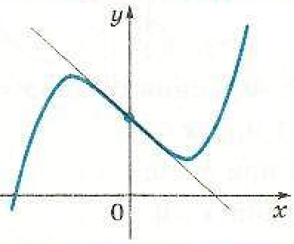
Угловые точки



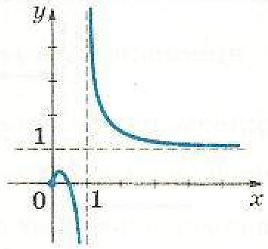
Выпуклость функции



Точка перегиба функции

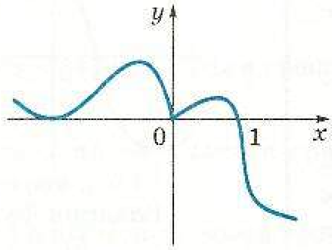


Асимптоты графика функции

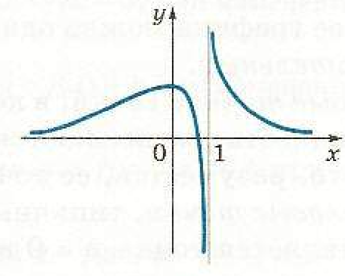


Вопросы и упражнения

Функция $y = f(x)$ задана графиком *а*, а функция $y = g(x)$ — графиком *б*.



а



б

Ответьте по графику, верны ли для этих функций следующие утверждения.

1. Функция непрерывна на всей области определения.
2. Функция имеет одну точку разрыва.
3. Функция является гладкой при $x > 1$.
4. Функция является гладкой на промежутке $(1; +\infty)$.

5. Функция имеет одну точку, в которой она определена и при этом нарушается ее гладкость.
6. Функция имеет одну угловую точку.
7. Функция имеет ровно один нуль.
8. График функции не имеет асимптот.
9. Касательную можно провести в любой точке графика.
10. Ровно в двух точках графика касательная параллельна оси x.
11. На промежутке (0; 1) функция является выпуклой вверх.
12. При $x > 1$ функция является выпуклой вниз.
13. Неравенство $f(x) < 0$ верно на всей области определения.
14. Функция не имеет точек перегиба.
15. Функция имеет одну точку перегиба.
16. Функция не имеет наибольшего значения.
17. Функция не имеет наименьшего значения.
18. Функция имеет ровно один максимум.
19. Функция имеет ровно один минимум.
20. Существует только одно число a такое, что уравнение $f(x) = a$ имеет ровно один корень.
21. Не существует таких чисел a, для которых уравнение $f(x) = a$ имеет ровно три корня.
22. При каждом значении k уравнение $f(x) = kx$ имеет ровно два корня.
23. Существует бесконечно много значений k, при которых уравнение $f(x) = kx$ имеет ровно два корня.
24. Существует такое число a, что уравнение $f(x) = ax^2$ имеет ровно один корень.

БЕСЕДА

Развитие понятия функции

«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*». Эти слова немецкого философа Ф.Энгельса кратко отражают важнейшее изменение в развитии математики, произошедшее в XVII в., и называют первого ученого, с именем которого это изменение связано.

Великий французский философ Рене Декарт в центр своей философской системы поставил понятие движения. В математике он рассматривает линии, которые «описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими — ибо этим путем всегда можно точно узнать им меру». Декарт осуществил давно назревшее в математике слияние алгебры с геометрией, соединив операции над постоянными числами и построения геометрических линий в одну науку, центром которой стало представление геометрического объекта уравнением, связывающим различные переменные величины.

В словах Декарта о необходимости рассматривать одни переменные величины как вполне определяемые им предшествующими уже заложена центральная идея функциональной зависимости. Однако понятию

Рене Декарт
(1596 — 1650)

Французский философ и математик, физик и физиолог; автор работы «Рассуждение о методе» (1637 г.). В геометрическом приложении к этой работе он обосновывает геометрический метод решения уравнений с помощью системы координат, которая с тех пор носит его имя. Заложил основы современного научного мышления.

функции предстоял еще долгий путь развития, пока он не привел к тому, которым пользуются сейчас в математике и ее приложениях.

В 1718 г. блестящий ученик Г. Лейбница Иоганн Бернулли дал следующее определение: «Функцией переменной величины называют количество, *образованное каким угодно способом* из этой переменной величины и постоянных». Весь XVIII в. проходил в явном и неявном споре выдающихся математиков (Д. Эйлера, Ж. Д'Аламбера, Ж. Фурье и др.) о том, что следует понимать под функцией. Этот спор не был схоластическим. Он возник из различных решений важной практической задачи о форме колебаний струны и в конце концов значительно расширил понятие функции, привел к открытию новых важных способов ее задания (например, в виде наложения бесконечного количества колебаний).

В 1855 г. великий русский математик Н. И. Лобачевский дал вполне современное определение функции, которое в формулировке немецкого математика Л. Дирихле звучит так: «Переменная y есть функция переменной x, если каждому значению x соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие — аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами». В данном курсе мы фактически следуем этому определению.

Дальнейшее развитие математики показало, что нельзя ограничиться лишь какими-то «просто» описываемыми способами задания функций, гораздо полезнее допустить любой мыслимый способ соответствия между переменными. Это привело в начале XX в. к отчетливым формулировкам понятия функции как отображения, которое позволяет каждому элементу данного числового множества однозначно поставить в соответствие другое число.

Такое понимание функции, распространенное к тому же не только на числа, но и на множества произвольных объектов, сильно обогатило возможности математики.

Развитие вычислительной техники и ее математического обеспечения привело к изменению взгляда на функцию в другом направлении. Машина может иметь дело с функцией лишь тогда, когда способ вычисления ее значений задан точным предписанием, алгоритмом. Наконец, источником развития понятия функции явилась (и продолжает оставаться до сих пор) физика, которая потребовала от математиков существенного обобщения понятия функции.

ГЛАВА 8 Многогранники и круглые тела

Занятие 1
Словарь геометрии

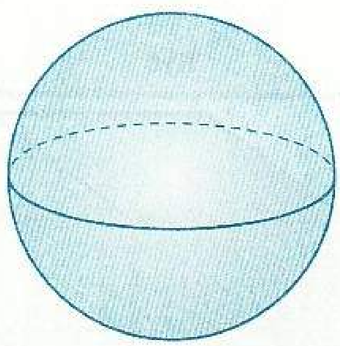
Какие геометрические понятия нам знакомы?

1. *Пространство.* Человек представляет себя и все, что его окружает, помещенным в *пространство.* Это пространство наполнено *телами.* Для описания расположения и взаимодействия тел в пространстве математика создала упрощенную модель — *геометрическое пространство*, придумала способы, как размещать в этом пространстве различные тела (фигуры), как их передвигать и совершать с ними другие преобразования.

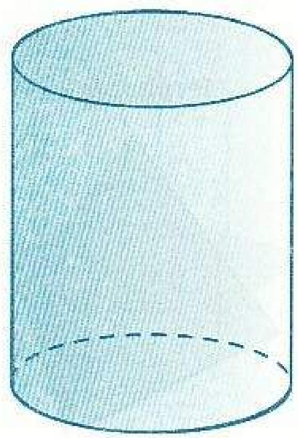
У нас имеются интуитивные представления о *размерности* — числе измерений, направлений, необходимых для описания геометрических объектов. Прямая считается *одномерной*, обладающей единственным «измерением», которое можно назвать длиной. Плоскость *двумерна.* Фигуры, составляющие части плоскости, можно измерять в двух направлениях, которые условно можно назвать длиной и шириной. Геометрическое пространство считается *трехмерным* (длина, ширина, высота).

Размерность часто приписывают не только прямой, плоскости, пространству, но и находящимся в них фигурам. Естественно считать линию (окружность, параболу, спираль, ломаную и т. п.) одномерной; плоскую или кривую поверхность (многоугольник, сферу как

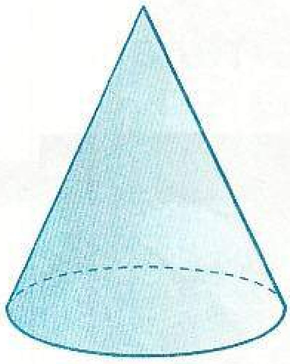
Шар



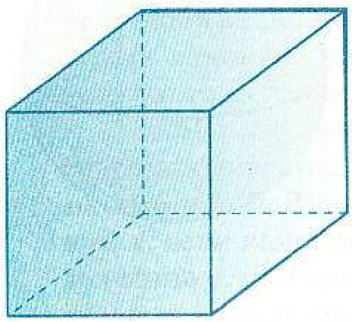
Цилиндр



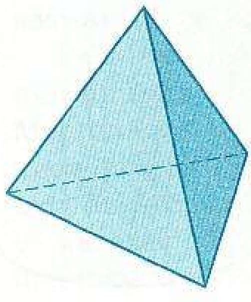
Конус



Куб



Тетраэдр



поверхность шара, поверхность куба и т. п.) двумерной, а сам куб или шар трехмерными.

2. *Пространственные тела*. Термин «*фигура*» имеет общий характер и может относиться к самым разным объектам, расположенным как на плоскости, так и в пространстве. Трехмерные фигуры часто называют *телами*. При этом тело считается ограниченным, расположенным в ограниченной, конечной части пространства.

Читателю уже хорошо знакомы такие тела, как *шар*, *куб*, *параллелепипед*, *призма*, *пирамида*, *конус*, *цилиндр*.

У всех тел есть *граница* и внутренняя часть. Граница куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды состоит из многоугольников. Вообще фигура, ограниченная многоугольниками, называется *многогранником*. Куб, параллелепипед, призма, тетраэдр, пирамида — это частные виды многогранников.

Многоугольники, составляющие границу многогранника, называются его *гранями*. Смежные (соседние) грани соприкасаются по *ребрам*, а ребра сходятся в *вершинах*. Разумеется, эта терминология хорошо знакома читателю.

Шар, цилиндр и конус являются круглыми телами. Их граница не состоит из плоских областей. Она может быть описана с помощью *вращения*. Если вращать какую-либо кривую в плоскости вокруг оси, лежащей в той же плоскости, то получается *поверхность вращения*. Поверхности шара, цилиндра и конуса образуются при вращении простейших кривых — окружности и прямой. Нетрудно себе представить, что сфера (поверхность шара) получается при вращении полуокружности вокруг ее диаметра, боковая поверхность цилиндра — при вращении отрезка вокруг параллельной ей оси, а боковая поверхность конуса — при вращении отрезка вокруг оси, проходящей через одну его вершину.

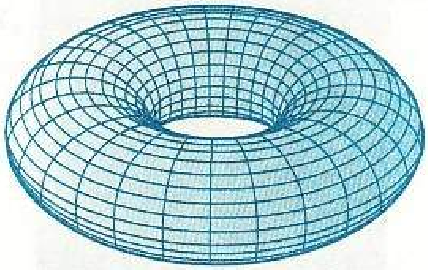
Таким образом, шар, цилиндр и конус принадлежат к другому, нежели многогранники, обширному классу фигур — *фигур* (*или тел*) *вращения*.

Приведем примеры окружающих нас тел, которые в первом приближении можно считать фигурами вращения:

- купола православных церквей;
- накачанная автомобильная камера («баранка»), имеющая форму фигуры вращения, близкую к той, которая получается при вращении круга вокруг непересекающей его оси. В математике такую фигуру называют *тором*;
- многие предметы домашней утвари (горшки, миски и т. п.), часто изготовляемые с помощью гончарного круга;
- природные явления — водовороты, смерчи и т. п.

Важным свойством многих фигур и тел является их *выпуклость*. Фигура называется выпуклой, если любые две точки фигуры можно соединить отрезком, целиком принадлежащим этой фигуре. Понятие выпуклости относится как к двумерным, так и трехмерным фигурам.

Тор



Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры одномерных, двумерных и трехмерных фигур.
2. Какие виды многогранников вам известны?
3. Как получить тело вращения?
4. Какая фигура называется выпуклой?

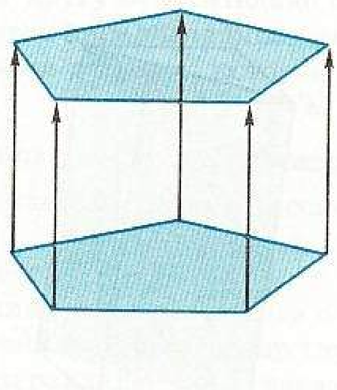
Занятие 2
Параллелепипеды и призмы

Как можно уточнить знакомые понятия параллелепипеда и призмы?

1. *Определения. Призма* — это многогранник, у которого выделены две грани (основания призмы), лежащие в параллельных плоскостях, являющиеся равными и параллельно расположенными многоугольниками (т. е. одно основание призмы получается параллельным переносом другого).

Боковые ребра призмы соединяют соответствующие вершины оснований. Они равны и параллельны друг другу.

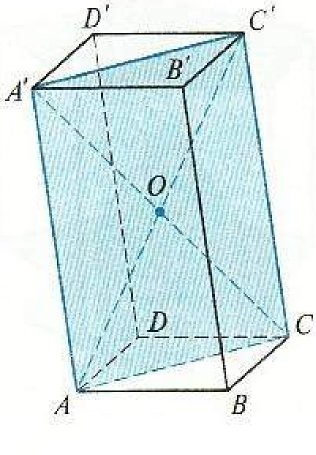
Призма



Покровская церковь в Кижах

Здание
Министерства обороны США

Параллелепипед



Боковые грани призмы представляют собой параллелограммы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям (боковые грани при этом также перпендикулярны плоскостям оснований.)

Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Четырехугольная призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом*.

2. *Примеры*. Почти каждое архитектурное сооружение имеет в своей структуре коробки в виде призм:

- Покровская церковь в Кижах представляет собой восьмерик — правильную восьмиугольную призму;
- в основе Пентагона — здания Министерства обороны США — лежит пятиугольная призма.

3. *Свойство диагоналей параллелепипеда.*

Теорема о диагоналях параллелепипеда. Четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

Доказательство. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ диагоналями являются отрезки AC', $A'C$, BD' и $B'D$. Возьмем любую пару из них, например, AC' и $A'C$. Их можно рассматривать как диагонали четырехугольника $AA'C'C$. Этот четырехугольник является параллелограммом (так как две его противоположные стороны AA' и CC' равны и параллельны), а в параллелограмме диагонали пересекаются в точке, являющейся их серединой.

Пусть точка O является, например, серединой диагонали AC'. Мы доказали, что эта же точка — середина диагонали CC'. Вместо диагонали CC' можно взять любую другую из оставшихся диагоналей (BD' и $B'D$) и точно так же получить, что точка O — их середина, т.е. середины всех диагоналей совпадают.

Точка O является центром симметрии параллелепипеда.

4. *Построение сечений*. В качестве примера проведем сечение в правильной шести-

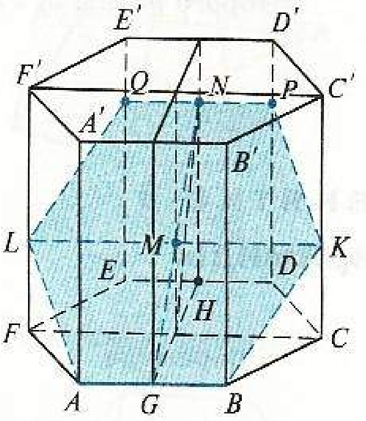
угольной призме, проходящее через одну из сторон основания и точку на боковом ребре.

Решение. Рассмотрим диагональное сечение призмы $CC'F'F$. Оно параллельно ребру AB, так как $AB \parallel FC$. Следовательно, искомое сечение пересечет диагональное по отрезку, параллельному FC. Проведем в диагональном сечении через точку K отрезок KL, параллельный CF. Мы получили еще одну точку сечения — точку L. Чтобы продолжить построение сечения, рассмотрим в призме осевое сечение через середины G и H сторон AB и DE соответственно перпендикулярно плоскости основания. Это сечение проходит через ось призмы и, следовательно, через точку M — середину отрезка KL. Искомое сечение содержит точки G и M и, значит, отрезок GM. Продолжив отрезок GM в плоскости осевого сечения, получим точку N, лежащую либо в грани $DD'E'E$, либо в плоскости основания. В любом из этих случаев плоскость сечения пересечет соответствующую грань по прямой, параллельной AB (так как AB параллельна как одной, так и другой грани). Теперь осталось провести через точку N отрезок, параллельный AB (или, что то же самое, параллельный $D'E'$), и получить две недостающие точки сечения.

Построение сечений

Дано: $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ — правильная призма.

Построить сечение, проходящее через ребро AB и точку K, лежащую на ребре CC'.



Полученное сечение $ALQPKB$

Вопросы и упражнения

1. Нарисуйте:

1) различные по форме сечения треугольной призмы;
2) различные по форме сечения параллелепипеда;
3) многогранник, получающийся при пересечении двух правильных треугольных пирамид, расположенных симметрично друг другу относительно середины высоты пирамиды. Докажите, что он является параллелепипедом;
4) сечение прямоугольного параллелепипеда с разными ребрами, которое имело бы форму квадрата.

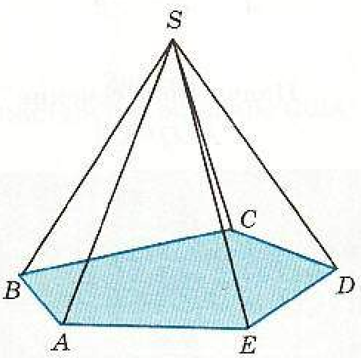
2. Для параллелепипеда, все грани которого являются одинаковыми ромбами:

1) докажите, что одно из диагональных сечений перпендикулярно плоскости основания, а другое является прямоугольником;
2) нарисуйте проекцию верхнего основания на нижнее;
3) докажите, что можно так соединить одну из вершин параллелепипеда с тремя ближайшими вершинами, что получится правильный тетраэдр (пусть острый угол ромба равен 60°). Выразите высоту параллелепипеда через его сторону.

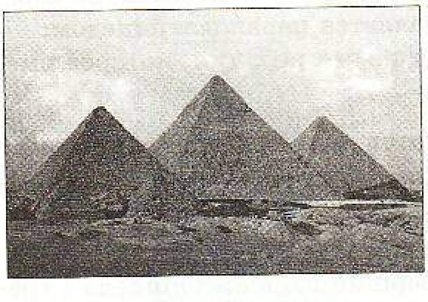
3. Вычислите для правильной треугольной призмы:
   1) площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания (сторона основания равна 2, боковое ребро — 1);
   2) расстояние между серединами непараллельных сторон оснований (сторона основания равна 6, боковая сторона — 4).
4. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, диагонали трех граней которого равны k, l и m.

Занятие 3
Пирамиды

Пирамида



Гробницы фараонов (Египет)



Что нужно знать о пирамидах?

1. *Определения*. *Пирамида* — это многогранник, одна из граней которого (основание) произвольный многоугольник $ABCDE$, а остальные грани — треугольники с общей вершиной S. При этом, разумеется, предполагается, что вершина пирамиды и ее основание не лежат в одной плоскости. Вершина пирамиды соединена ребрами с вершинами основания. Боковые грани пирамиды — треугольники.

Пирамида называется *правильной*, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а вершина проектируется в его центр. Ребра правильной пирамиды равны между собой и образуют равные углы с плоскостью основания. Точно так же боковые грани правильной пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания.

Если от пирамиды отсечь ее часть, содержащую вершину пирамиды, плоскостью, параллельной основанию, то останется так называемая *усеченная пирамида*.

2. *Примеры*. В архитектуре пирамиды обычно завершают постройки, в основании которых лежит призма, однако известны и чисто пирамидальные конструкции:

- в Египте, в районе Гизы находится одно из чудес света — гробницы фараонов, построенные 2500 лет до н. э. в форме четырехугольных пирамид;

• в Париже при реконструкции входа в музей-дворец Лувр использованы стеклянные тетраэдры (пирамиды Лувра);

• шатры некоторых церковных построек выполнены в форме пирамид.

3. *Теорема о пирамиде с равными боковыми ребрами.*

Теорема. Проекция вершины пирамиды с равными боковыми ребрами на основание равноудалена от вершин основания.

Доказательство. Пусть точка O является проекцией вершины S пирамиды на плоскость основания. Для любой вершины A основания отрезок OA является проекцией ребра SA. Из равенства ребер следует равенство их проекций. Следовательно, точка O равноудалена от всех вершин основания, что и требовалось доказать.

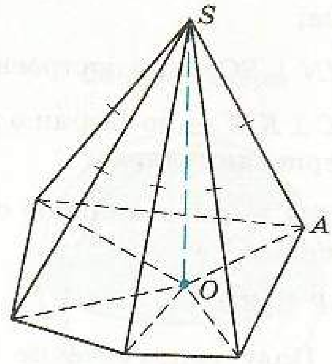
Мы доказали, что у пирамиды с равными ребрами основанием является такой многоугольник, для которого найдется точка, равноудаленная от всех его вершин. Это означает, что около этого многоугольника можно описать окружность, а вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

4. *Пример построения сечения пирамиды.* В правильной четырехугольной пирамиде через середины двух смежных сторон основания провести сечение перпендикулярно противолежащему боковому ребру.

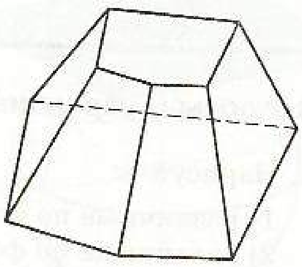
Решение. Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ с центром O, причем SO — перпендикуляр к плоскости основания. Пусть K и L — середины сторон AB и AD соответственно. Нужно провести сечение через K и L перпендикулярно ребру SC.

Рассмотрим диагональное сечение ASC и лежащую в нем точку M — середину отрезка KL. Опустим в этом сечении из точки M перпендикуляр на прямую SC. Рассмотрим случай, когда он пересекает сам отрезок SC (а не его продолжение). Пусть N — построенная точка пересечения. Плоскость, проходящая через KL и MN, — искомая. Она перпендикулярна ребру SC, так как $SC \perp MN$ по построению и $SC \perp KL$ по теореме о трех перпендикулярах.

Теорема о пирамиде с равными боковыми гранями



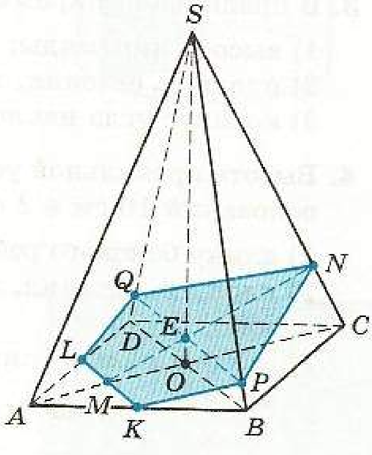
Усеченная пирамида



Построение сечений

Дано: $SABCD$ — правильная пирамида.

Построить сечение, проходящее через середины двух смежных сторон основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру.



Решение: $AK = KB$; $AL = LQ$.

- ASC — диагональное сечение;
- $MN \perp SC$ — по построению;
- $SC \perp KM$ — по теории о трех перпендикулярах;
- SBD — диагональное сечение;
- $QP \parallel BD$.

Полученное сечение $LQNPK$

Осталось найти точки пересечения с ребрами SB и SD. Для этого возьмем точку E — точку пересечения MN с осью пирамиды — и проведем через нее в диагональном сечении SBD прямую, параллельную BD. Это и есть линия, по которой искомое сечение пересекает SBD, так как сечение проходит через отрезок KL, который параллелен BD и, значит, параллелен плоскости SBD.

Пусть теперь MN пересекает продолжение SC (проделайте необходимые построения). Тогда MN пересечет ребро AS в некоторой точке P. Соединим точку P с точками K и L, получим искомое сечение. Доказательство того, что оно перпендикулярно ребру SC, повторяется без изменений.

Вопросы и упражнения

1. Нарисуйте:

1) различные по форме сечения треугольной пирамиды;
2) различные по форме сечения четырехугольной пирамиды;
3) осевые сечения древней египетской пирамиды (они были ступенчатыми — представляли собой поставленные друг на друга усеченные четырехугольные пирамиды), а также ее проекцию на плоскость основания.

2. Докажите следующие утверждения:

1) в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно-перпендикулярны;
2) каждое из боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота равна стороне основания, перпендикулярно двум сторонам основания и одному из боковых ребер;
3) одна из боковых граней треугольной пирамиды с равными боковыми ребрами и прямоугольным треугольником в основании перпендикулярна основанию.

3. В правильной пирамиде $ABCD$ все ребра равны a. Вычислите:

1) высоту пирамиды;
2) площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды и боковое ребро;
3) косинус угла наклона боковой грани к основанию.

4. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 7 см, стороны оснований 10 см и 2 см. Найдите:

1) длину бокового ребра;
2) площадь сечения, проходящего через середину высоты параллельно основанию;
3) высоту полной пирамиды, из которой получилась данная усеченная пирамида.

Занятие 4
Круглые тела

Какие круглые тела нам хорошо знакомы?

1. *Шар* — это множество точек пространства, расстояние которых до данной точки (*центра* шара) не превосходит данного числа (*радиуса* шара).

Границу шара называют *сферой*. Точки сферы удалены от центра на одно и то же расстояние, равное радиусу.

Сечения шара плоскостями — круги. Сечения шара плоскостями, проходящими через его центр, — круги, радиусы которых совпадают с радиусом шара.

Чем дальше отходит плоскость сечения от центра шара, тем меньше становится радиус окружности в сечении.

Если R — радиус шара; h — расстояние плоскости сечения от центра шара; r — радиус сечения, то

$$R^2 = h^2 + r^2 \text{ и } r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

При $h = 0$ сечение проходит через центр шара, $r = R$; при $h = R$ и $r = 0$ — случай касания — плоскость с шаром имеет одну общую точку, и сечение вырождается в точку.

Касательная плоскость — плоскость, имеющая с шаром одну общую точку.

Радиус шара, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости.

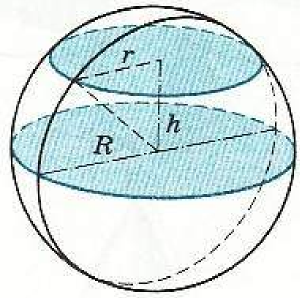
2. *Цилиндр. Прямой круговой цилиндр* — тело, получаемое вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

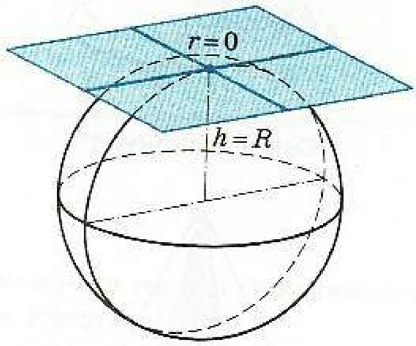
Сторона прямоугольника, вокруг которой производилось вращение, называется *осью* цилиндра.

Стороны прямоугольника, примыкающие к оси, описывают при вращении два равных круга — *основания* цилиндра.

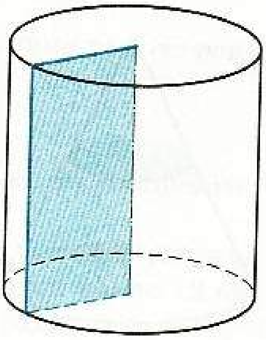
Радиус любого из этих кругов называется радиусом цилиндра. Он равен стороне вращающегося прямоугольника, перпендикулярной оси вращения.

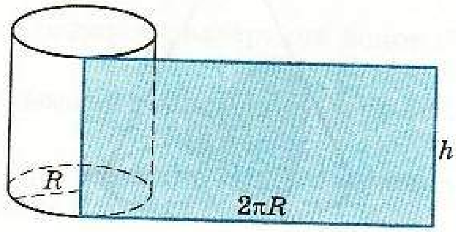
Сечения шара

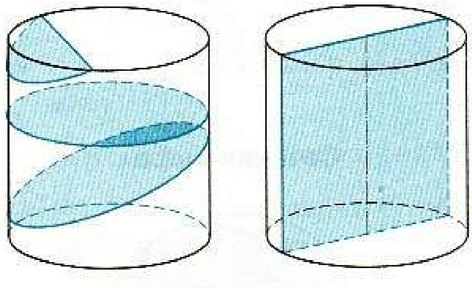




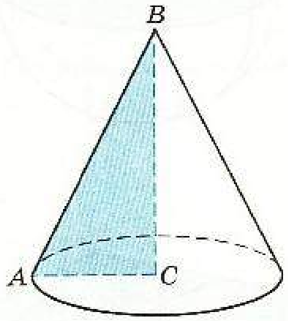
Сечения цилиндра



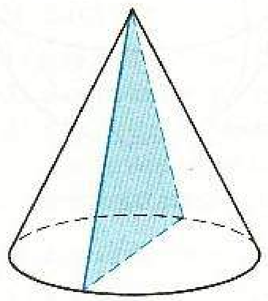


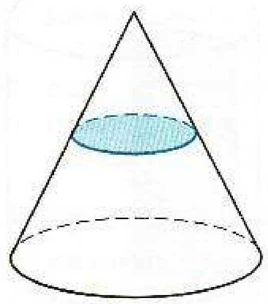


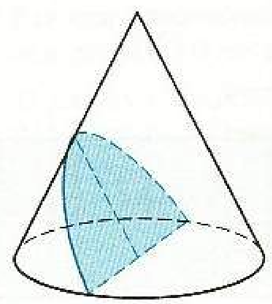
Конус



Сечения конуса







Расстояние между основаниями цилиндра называется его *высотой*. Ясно, что высота равна длине той стороны прямоугольника, которая выбрана в качестве оси вращения.

Отрезок, параллельный оси цилиндра и соединяющий граничные точки его оснований, называется *образующей* цилиндра.

Сторона прямоугольника, параллельная оси, описывает *боковую поверхность* цилиндра.

Боковую поверхность цилиндра можно развернуть на плоскость. Эта развертка будет представлять собой прямоугольник, одна из сторон которого равна высоте цилиндра, а другая — длине окружности радиуса, равного радиусу цилиндра.

Сечения цилиндра плоскостями, параллельными основаниям, — круги, равные основаниям.

Другие сечения имеют форму эллипса или его частей, если плоскость сечения наклонена к основаниям.

Если плоскость сечения перпендикулярна основаниям, то в сечении получается прямоугольник.

Сечение, проходящее через ось цилиндра, называется *осевым сечением*.

3. *Конус*. *Прямой круговой конус* — тело, получаемое вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Пусть прямой круговой конус получен вращением треугольника ABC вокруг его катета BC (C — вершина прямого угла).

Прямая BC называется *осью* конуса; круг, получаемый вращением катета AC, — *основанием* конуса; точка B — *вершиной* конуса; любой отрезок, соединяющий вершину конуса с граничной точкой основания, — *образующей* конуса.

Высота конуса — это тот катет, вокруг которого производилось вращение прямоугольного треугольника, порождающего конус. Его длина равна расстоянию от вершины конуса до его основания.

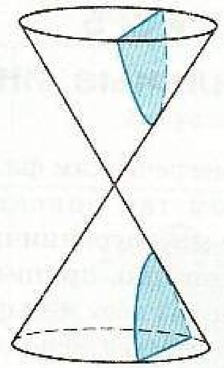
В сечениях конуса плоскостями, параллельными основанию образуются круги.

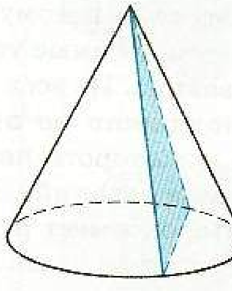
Сечение конуса, проходящее через его ось, называется *осевым сечением*. Осевое сечение перпендикулярно основанию, так как проходит через ось, которая перпендикулярна основанию.

Другие сечения конусов представляют собой плоские фигуры, границы которых являются замечательными кривыми (или их частями).

Сечения конусов могут быть эллипсами, параболами, гиперболами.

Как и в случае пирамиды, плоскость сечения, параллельного основанию, разбивает конус на две части — верхнюю, являющуюся конусом, подобным исходному, и нижнюю, называемую *усеченным конусом*.





Вопросы и упражнения

1. Нарисуйте:

1) сечения шара, проходящие через две заданные точки на его поверхности и имеющие самую маленькую и самую большую площадь;
2) два сечения шара, симметричные относительно его центра;
3) геометрическое место точек, удаленных от данного отрезка на расстояние R;
4) развертку усеченного конуса;
5) фигуру, которая получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг его гипотенузы;
6) фигуру, которая образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, параллельной одному из катетов;
7) фигуру, которая получается при вращении треугольника вокруг оси, проходящей через его вершину.

2. Вычислите:

1) радиус круга в сечении шара радиуса 5 см плоскостью, отстоящей на 3 см от его центра;
2) радиус окружности, получающейся при пересечении двух сфер радиуса 10 см, расположенных так, что расстояние между их центрами равно 12 см;
3) радиус шара, который положен в круглое отверстие радиуса 4 см и углублен в него на 2 см;
4) сторону куба, вписанного в шар радиуса R;
5) высоту цилиндра, в который вписан шар (касающийся обоих оснований цилиндра) радиуса R;
6) при каком отношении высоты цилиндра к его радиусу разверткой боковой поверхности цилиндра будет квадрат;
7) высоту конуса и его образующую, если она составляет с основанием угол 60°. Радиус основания конуса равен R;
8) высоту конуса и его образующую, если угол при вершине осевого сечения конуса прямой, а радиус основания конуса равен R.

Занятие 5
Правильные многогранники

Древнегреческим философом Платоном так описаны правильные многогранники: «Земле мы, конечно, припишем вид куба: ведь из всех четырех сущностей наиболее неподвижна и пригодна к образованию тел именно Земля, а потому ей необходимо иметь самые устойчивые основания... Из всех тел наиболее подвижно по природе своей то, у которого наименьшее число оснований, ибо оно со всех сторон имеет режущие грани и колющие углы... Пусть же образ пирамиды, рожденный объемным, и будет первоначалом и семенем огня...»

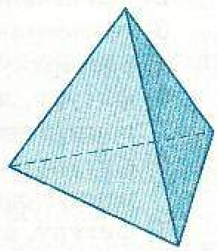
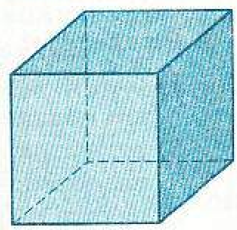
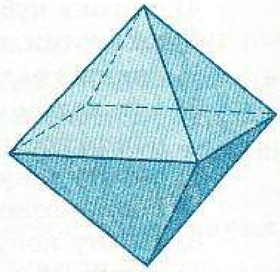
Какие многогранники стали символом красоты и совершенства?

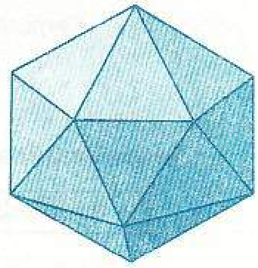
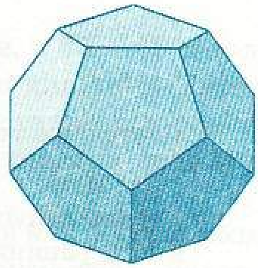
Правильный многогранник — это выпуклый многогранник, у которого все грани — одинаковые правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

Приведем таблицу, описывающую количественные характеристики правильных многогранников.

В таблице:

v — число вершин многогранника; e — число ребер; f — число граней.

Многогранник	Число: вершин v	ребер e	граней f	Число поворотов, совмещающих тело с собой	Рисунок
Тетраэдр	4, в которых сходятся по 3 треугольника	6	4 треугольника	12	
Куб (гексаэдр)	8, в которых сходятся по 3 квадрата	12	6 квадратов	24	
Октаэдр	6, в которых сходятся по 4 треугольника	12	8 треугольников	24	

Много-гранник	Число			Число поворотов, совмещающих тело с собой	Рисунок
	вершин v	ребер e	граней f		
Икосаэдр	12, в которых сходятся по 5 треугольников	30	20 треугольников	60	
Додекаэдр	20, в которых сходятся по 3 пятиугольника	30	12 пятиугольников	60	

Легко заметить, что во всех случаях выполняется соотношение: $v + f = e + 2$, т.е. что сумма числа вершин и числа граней на 2 больше числа ребер.

Это наблюдение верно для любого выпуклого многогранника и составляет содержание знаменитой теоремы, доказанной впервые Леонардом Эйлером.

Теорема Эйлера. Пусть f обозначает число граней, e — число ребер, v — число вершин выпуклого многогранника. Тогда $f + v = e + 2$.

Полное доказательство теоремы Эйлера довольно трудоемко. Проверить же эту теорему для частных случаев многогранников достаточно просто.

Если соединим центры граней правильного многогранника, то получим снова правильный многогранник, называемый двойственным исходному. Двойственными оказываются куб и октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Тетраэдр же двойствен сам себе. Кроме того, шесть диагоналей боковых граней куба образуют тетраэдр, а среди 20 вершин додекаэдра можно выбирать восьмерки, которые образу-

Л.Эйлер
(1707—1783)

Великий математик, физик и астроном. По происхождению швейцарец; работал в России и Германии; автор более 800 работ по математическому анализу, теории чисел, дифференциональной геометрии, математической физике (он написал первый в мире учебник по теоретической механике, курс математической навигации, трилогию об основах дифференциального и интегрального исчисления и др.)

Теорема Эйлера

$$\boxed{f + v = e + 2}$$

Платоновы тела

Пять правильных многогранников (см. таблицу)

Доказательство утверждения о существовании лишь пяти типов правильных многогранников

$$\left.\begin{array}{l} fn = 2e \\ vm = 2e \end{array}\right\} \Rightarrow v + f = e + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2e}{m} + \frac{2e}{n} = e + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2e}{m} + \frac{2e}{n} > e \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

У полученного неравенства только пять решений, которые соответствуют известным пяти типам правильных многогранников — правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

ют кубы. Существует много других построений, связывающих между собой все пять правильных многогранников, называемых *платоновыми телами*.

Почему существует лишь пять правильных многогранников?

Приведем доказательство утверждения о том, что существует лишь пять типов правильных многогранников.

Пусть в каждой вершине правильного многогранника сходятся m ребер и каждая грань — многоугольник с n ребрами. Пусть у многогранника всего v вершин, e ребер и f граней. Подсчитаем разными способами число ребер. Всего есть f граней, в каждой — n ребер, итого fn ребер, но каждое сосчитано два раза, так как оно принадлежит двум граням. Итак, $fn = 2e$.

С другой стороны, есть всего v вершин, в каждой сходится m ребер, но снова каждое ребро засчитано дважды, так как оно соединяет две вершины. Итак, $vm = 2e$.

Подставим в соотношение Эйлера $f + v = e + 2$ вместо f и v их выражения через m, n и e:

$$\frac{2e}{m} + \frac{2e}{n} = e + 2.$$

Нам достаточно даже неравенства $\frac{2e}{m} + \frac{2e}{n} > e$. Сократив его на $2e$, получим $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ $(m,\ n \geq 3)$. Числа m и n не могут быть больше трех, так как уже $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, и при $m,\ n \geq 4$ получим: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$. Есть возможности $m_1 = n_1 = 3$; $m_2 = 3$, $n_2 = 4$; $m_3 = 4$, $n_3 = 3$; $m_4 = 5$, $n_4 = 3$; $m_5 = 3$, $n_5 = 5$. Если же одно из чисел равно трем, а другое больше или равно шести, то

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Вопросы и упражнения

1. Нарисуйте развертки правильного тетраэдра, куба и октаэдра.
2. Вычислите радиусы шаров, описанных вокруг правильного тетраэдра, куба и октаэдра, зная ребро правильного многогранника.
3. Сколько осей симметрии есть у куба, у правильного тетраэдра?
4. Как связаны между собой куб и октаэдр?
5. В чем состоит теорема Эйлера для многогранников?

БЕСЕДА

Платоновы тела

Почти две с половиной тысячи лет назад, а точнее, в 50 — 60-х годах III в. до н. э. великий греческий философ Платон в диалоге «Тимей» описал систематическое построение космоса и представил все реально существующее как совокупное взаимодействие космических идей и материи.

Четырем главным земным сущностям — земле, огню, воде и воздуху — Платон сопоставляет прекрасные геометрические тела, построения которых он подробно описывает. Приведем несколько цитат из «Тимея».

«Когда же четыре равносторонних треугольника окажутся соединенными в три двугранных угла, они образуют один объемный угол... Завершив построение четырех таких углов, мы получаем первый объемный вид, имеющий свойство делить всю описанную около него сферу на равные и подобные части.

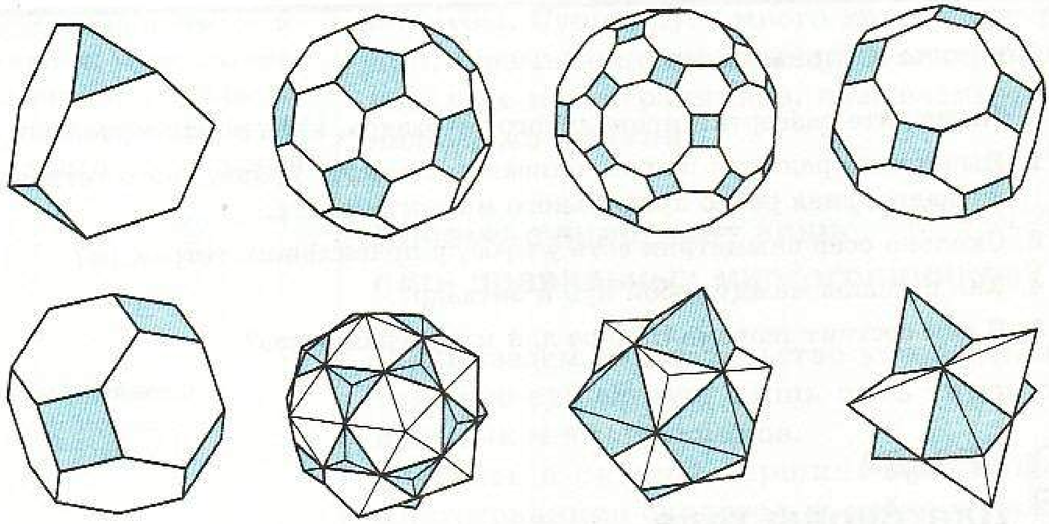
Второй вид строится из исходных треугольников, соединившихся по восемь в равносторонний треугольник и образующих каждый раз из четырех плоских углов по одному объемному; когда таких объемных углов шесть, второе тело получает завершенность.

Третий вид образуется из двенадцати объемных углов, каждый из которых охвачен пятью равносторонними треугольниками, так что все тело имеет двадцать граней...»

Далее столь же образно Платон связывает воздух с октаэдром, а воду — с икосаэдром. Что же касается пятого правильного многогранника — додекаэдра, то Платон пишет, что у него «в запасе оставалось еще пятое многогранное построение: его Бог определил для Вселенной и прибегнул к нему, когда разрисовывал ее и украшал».

Пять правильных многогранников — куб, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр — остаются символом глубины и стройности геометрии, образцом красоты и совершенства.

Если в определении правильного многогранника не требовать, чтобы все грани были одинаковыми правильными многоугольниками (но сохранить требование, чтобы грани в каждой вершине сходились одинаковым образом), то, кроме пяти платоновых тел, можно построить еще



Архимедовы тела

13 таких многогранников и две бесконечные их серии (призмы и антипризмы, в основаниях которых находятся правильные n-угольники). Мы воспроизводим все эти многогранники с указанием того, какие правильные n-угольники сходятся в каждой вершине. Сложные названия этих многогранников не приводим. Вместе их часто называют архимедовыми телами. Обратите внимание, что среди них есть «усеченные» платоновы тела. Найдите их на рисунке.

Платоновы и архимедовы тела имеют богатую симметрию. В природе похожую симметрию имеют различные кристаллы. Атомы кристалла расположены в пространстве очень симметрично, т. е. их взаимное расположение в пространстве может неограниченно повторяться. Наука о кристаллах — кристаллография — поставила перед математиками вопрос о том, какие вообще возможны типы симметрий кристаллов. Эта задача была успешно решена к середине XX в. Большую роль при этом сыграл русский кристаллограф и математик Евграф Степанович Федоров. Оказалось, что существует ровно 230 типов симметрий, которые могут быть симметриями различных кристаллов. Это позволило составить полный список всех возможных типов кристаллов и реализовать на практике их создание.

ГЛАВА 9

Начала математического анализа

Занятие 1
Процесс и его моделирование

Что изучает математический анализ?

В основе математического анализа лежит идея движения, изменения процесса. Он предлагает набор некоторых стандартных математических моделей, с помощью которых можно описать различные процессы, разнообразные связи между меняющимися величинами, *переменными*.

1. *Дискретная модель — последовательность.*

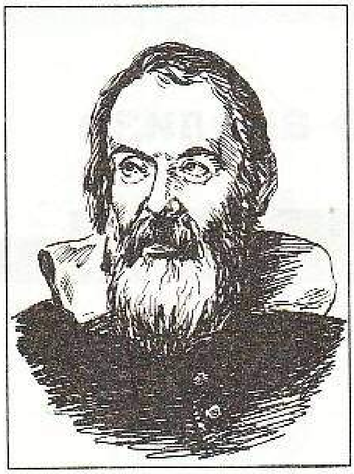
Стандартный пример — банковский вклад. При начальном вкладе A_0, годовом проценте роста вклада p и при условии капитализации вклада (в конце годового срока накопленный процент добавляется к вкладу и последующее начисление производится с увеличенной суммы) изменения вклада происходят один раз в год. Моделью этого процесса является числовая последовательность A_0, A_1, A_2, ..., где A_n — сумма вклада через n лет (n — натуральное число). Ясно, что $A_{n+1} = A_n\left(1+\frac{p}{100}\right)$, так как при переходе от n-го года к $(n+1)$-му накопленный за n лет вклад A_n умножается на число $1+\frac{p}{100}$.

В этой модели время меняется скачками, т.е. дискретно; нас интересует только число полностью прошедших лет, которое является натуральным числом.

Основоположники математического анализа

Исаак Ньютон
(1643 — 1727)

Великий английский математик, механик, астроном и физик; автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Одновременно с Г. Лейбницем создал основы математического анализа, исходя из задач механики и физики. Закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном, позволил построить теорию движения небесных тел.



Галилео Галилей
(1564—1642)

Великий итальянский астроном, физик и математик, один из основателей современного естествознания. Создатель науки о движении — кинематики.

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646—1716)

Великий немецкий философ, физик и математик. Одновременно с Ньютоном создал дифференциальное и интегральное исчисления, исходя из геометрических задач. Лейбницу принадлежит большинство обозначений и терминов математического анализа, используемых в настоящее время.

2. *Непрерывная модель — функция, заданная формулой.*

Стандартный пример — закон движения материальной точки под действием силы тяжести. По этому закону положение $\mathbf{r}$ точки, движущейся в пространстве под действием силы тяжести в момент времени t, может быть описано *формулой* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}}{2}t^2$, где $\mathbf{r}_0$ — вектор начального положения точки (при $t = 0$); $\mathbf{v}_0$ — вектор начальной скорости; $\mathbf{g}$ — некоторый постоянный вектор (ускорение свободного падения).

В этой модели время — переменная t — меняется непрерывно в течение некоторого промежутка. Модель позволяет вычислить положение точки в любой момент времени.

3. *Модель в форме зависимости — уравнение.*

Стандартный пример — второй закон Ньютона. Масса тела m, действующая на него сила $\mathbf{F}$ и его ускорение $\mathbf{a}$ связаны *зависимостью* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Если нам явно заданы выражения для определения силы и массы, то нахождение ускорения является задачей решения *алгебраического уравнения*. Если при тех же данных требуется найти закон движения, необходимо не только определить ускорение, но и знать новый вид связи между положением точки $\mathbf{r}$ и ее ускорением $\mathbf{a}$ в момент времени t. Моделирование этого вида связи происходит с помощью новой, не алгебраической, операции — дифференцирования, — а само уравнение (если понимать его как уравнение для нахождения $\mathbf{r}$) становится *дифференциальным уравнением*.

4. *Интегральная модель — плотность.* Стандартный пример — масса тела с переменной плотностью. В простейших случаях масса тела m пропорциональна его объему V: $m = \rho V$, где ρ — некоторое постоянное число (плотность). Так, для ртути $\rho = 13\,600$ кг/м^3 и банка ртути объемом 1 л = 1 дм^3 = 10^{-3} м^3 имеет массу $m = 13{,}6$ кг. Во многих случаях плотность вещества может меняться при переходе от одной точки к другой. Тогда удается записать лишь приближенное равенство

$m \approx \rho V$, которое верно только вблизи рассматриваемой точки и при переходе от одной точки A данного тела к другой коэффициент ρ будет меняться по закону: $\rho = \rho(A)$. Исследование модели такого рода требует еще одной новой операции — *интегрирования*.

Таким образом, математический анализ создает модели для описания различных процессов, исследование которых требует применения наряду с известными методами и новых операций — дифференцирования и интегрирования.

Зачем понадобились новые методы, развитые математическим анализом?

XVIII в. часто называют веком научной революции, определившей развитие общества вплоть до наших дней. Наиболее ярко эта революция проявилась в замечательных математических открытиях, совершенных в XVII в. и осознанных в последующее столетие. «Нет ни одного объекта в материальном мире и ни одной мысли в области духа, на которых не отразилось бы влияние научной революции XVIII в. Ни один из элементов современной цивилизации не мог бы существовать без принципов механики, без аналитической геометрии и дифференциального исчисления. Нет ни одной отрасли в деятельности человека, которая не испытала бы на себе сильного влияния гения Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница». Эти слова французского математика Э. Бореля, произнесенные им в 1914 г., остаются справедливыми и в настоящее время. Рядом с названными четырьмя именами можно поставить имена их предшественников, современников и последователей: П. Ферма (1601—1665), Б. Паскаль (1623—1662), И. Кеплер (1571—1630), X. Гюйгенс (1629—1695), И. Барроу (1630—1677), братья Якоб и Иоганн Бернулли (1654—1705; 1667—1748) и др.

Что же нового внесли эти ученые в понимание и описание окружающего нас мира? Коротко можно было бы ответить так — в это описание вошло движение, изменение, вариативность, т. е. жизнь с ее динамикой и раз-

Пьер Ферма
(1601—1665)

Французский математик. В теории чисел с его именем связывают две теоремы — великая и малая теоремы Ферма. Великая теорема о неразрешимости уравнения $x^n + y^n = z^n$ в натуральных числах при $n > 2$ оставалась неприступной до недавних дней. Ферма принадлежит идея «получения максимумов и минимумов», которая является одной из центральных идей математического анализа.

Блез Паскаль
(1623—1662)

Французский математик, физик, философ и писатель. Трудно найти среди ученых XVII в.

столь же разносторонне одаренную фигуру. Его «Мысли» являются одним из величайших философских трактатов. С именем Паскаля связывают создание первой вычислительной машины и открытие важнейшего закона гидромеханики. Геометрические исследования ученого легли в основание теории интегрирования.

Формулы арифметической и геометрической прогрессий

$$\boxed{a_n = a_1 + d(n - 1)}$$

— арифметическая прогрессия;

$$\boxed{a_n = a_1q^{n-1}}$$

— геометрическая прогрессия;

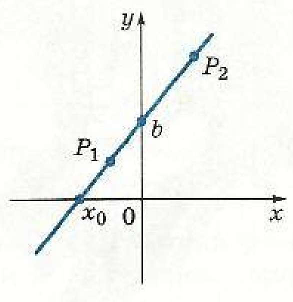
$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$$

— частичная сумма арифметической прогрессии;

$$s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}, (q \neq 1)$$

— частичная сумма геометрической прогрессии.

График линейной функции



$y = f(x)$ $\quad P_1(x_1; y_1)$

$f(x) = kx + b$ $\quad P_2(x_2; y_2)$

$b = f(0)$ $\quad k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$f(x_0) = 0$

$x_0 = -\dfrac{b}{k}$

витием, а не только статические слепки и одномоментные фотографии ее состояний.

С течением времени математические открытия XVII — XVIII вв. выразились в таких понятиях, как переменная, функция, координаты, график, вектор, производная, интеграл, ряд, дифференциальное уравнение. Некоторые понятия в этом списке читателю знакомы, другие предстоит узнать в этой книге.

Еще недавно понятия *«дифференциал»*, *«интеграл»* казались сложными и недоступными. Однако стоит вспомнить, что Паскаль, Декарт и Лейбниц были не столько математиками, сколько философами. Именно общечеловеческий и философский смысл их математических открытий составляет в настоящее время главную ценность и является необходимым элементом общей культуры.

Какие простые математические модели полезно повторить перед изучением математического анализа?

1. *Прогрессии.* Арифметические и геометрические прогрессии являются самыми простыми и наиболее часто встречающимися примерами числовых последовательностей.

Арифметическая прогрессия — последовательность, задаваемая рекуррентной формулой $a_n = a_{n-1} + d$, d — разность прогрессии.

Геометрическая прогрессия — последовательность, задаваемая рекуррентной формулой $a_n = qa_{n-1}$, q — знаменатель прогрессии.

2. *Линейные функции.* Линейной функцией называется функция, значения которой могут быть вычислены по формуле $y = kx + b$.

Область определения. Линейная функция, заданная формулой $y = kx + b$, имеет областью определения множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

Обращение в нуль. Линейная функция при $k \neq 0$ имеет единственный нуль: $x_0 = -\dfrac{b}{k}$.

Промежутки постоянного знака. Линейная функция $y = kx + b$, $k \neq 0$, сохраняет постоянный знак на каждом из промежутков

$\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ и $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ в зависимости от коэффициента k:

k	$\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$	$\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$
$k > 0$	−	+
$k < 0$	+	−

Монотонность. Линейная функция $y = kx + b$ возрастает на всей числовой оси, если $k > 0$, и убывает на всей числовой оси, если $k < 0$.

3. *Векторное уравнение движения.* С движением точки по некоторой кривой связан ряд векторных величин: **r** — радиус-вектор; характеризующий положение точки; **v** — скорость точки; **a** — ускорение.

Зафиксируем некоторую точку отсчета O и будем положение движущейся точки в момент времени t задавать радиусом-вектором относительно O. Если в моменты времени t_1, t_2, t_3 точка занимает положения A_1, A_2, A_3, то ее радиусы-векторы $\mathbf{r}(t_1) = \overrightarrow{OA_1}$, $\mathbf{r}(t_2) = \overrightarrow{OA_2}$, $\mathbf{r}(t_3) = \overrightarrow{OA_3}$.

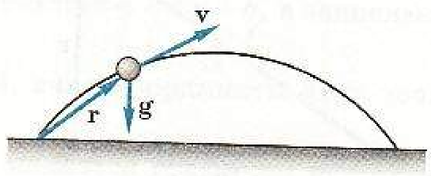
Итак, мы получили первую векторную величину, связанную с движением точки, — радиус-вектор **r**, определяющий ее положение относительно некоторой точки отсчета O.

В простейшей ситуации, когда точка движется по прямой, ее положение определяется одним числом — координатой.

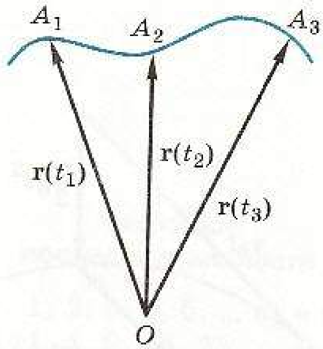
Часто в механике важно знать не положение точки, а ее перемещение за интервал времени $[t_1, t_2]$. Перемещение является вектором и изображается направленным отрезком, начало и конец которого совпадают с положениями точки в моменты t_1 и t_2. Перемещение обозначают $\Delta\mathbf{r}$. Вектор $\Delta\mathbf{r}$ связан с радиусами-векторами, характеризующими положение точки: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$. Про перемещение можно сказать, что оно является приращением вектора **r** за отрезок времени $[t_1, t_2]$.

В простейшем случае, когда точка движется по прямой, скорость направлена по этой же прямой. В общем случае скорость направлена по касательной к траектории движения.

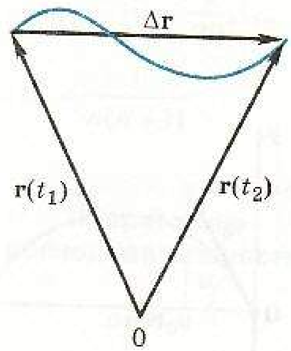
Движение снаряда



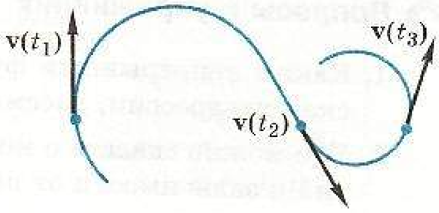
Радиусы-векторы точек

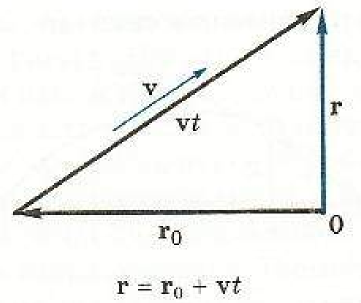


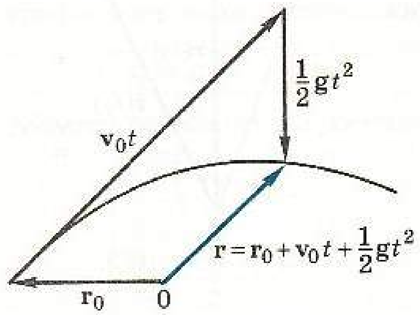
Перемещение точки

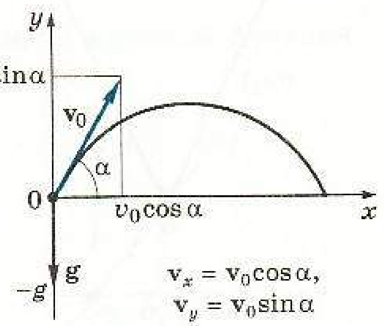


Направление скорости









Если равнодействующая **F** всех сил, действующих на точку, равна нулю, то ускорение **a** также равно нулю и точка движется с постоянной скоростью **v**. В этом случае радиус-вектор **r** точки линейно зависит от времени: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, где t — время и $\mathbf{r}_0$ —начальное положение точки, т.е. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$. Если на точку действует постоянная сила **F**, то ускорение **a** постоянно и точка совершает движение по квадратичному закону $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ (*), где $\mathbf{v}_0$ — начальная скорость точки. Скорость точки в этом случае меняется линейно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t.$$

Рассмотрим, например, движение снаряда, начальная скорость $\mathbf{v}_0$ которого была направлена под углом α к горизонту. Выберем в качестве начальной точки O положение снаряда в момент времени $t = 0$, тогда получаем соотношение (*). (Здесь рассматривается идеальная ситуация, когда сила тяжести, действующая на снаряд, постоянна и действием других сил пренебрегаем.)

При решении задач от векторных уравнений переходят к координатным.

Выберем оси координат так, как показано на рисунке. Векторное равенство (*) запишем в проекциях на оси координат, т.е. в координатном виде. Сначала разложим векторы $\mathbf{v}_0$ и **g** по горизонтальному и вертикальному направлениям. Проекция вектора $\mathbf{v}_0$ на ось x равна $v_0 \cos\alpha$, на ось y – $v_0 \sin\alpha$; проекция ускорения на ось x равна нулю, а на ось y равна $-g$. Таким образом,

$$r_x = tv_0 \cos\alpha;\ r_y = tv_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

где r_x, r_y — координаты вектора **r**.

Вопросы и упражнения

1. Каким непрерывным функциям соответствуют арифметическая и геометрическая прогрессии, рассмотренные как функции натурального аргумента?
2. Что можно сказать о монотонности арифметической и геометрической прогрессий в зависимости от первого члена, разности и знаменателя?

3. Какие последовательности, кроме прогрессий, вам известны?
4. Как располагается прямая, график линейной функции $y = kx + b$, в зависимости от углового коэффициента k?
5. Как вычислить угловой коэффициент k прямой, зная координаты двух точек этой прямой?
6. Всякая ли прямая на координатной плоскости является графиком некоторой линейной функции?
7. Перепишите в координатах векторное уравнение движения точки под действием силы тяжести.
8. Как в векторной форме записать закон равномерного движения?
9. Как в векторной форме записать закон движения с постоянным ускорением?

Занятие 2
Последовательности

Что такое последовательность и чем она отличается от обычной функции?

1. *Последовательность как функция.* Последовательность можно понимать как частный вид функции. *Числовая последовательность* определяется правилом, по которому для всякого натурального числа n можно вычислить n-й член этой последовательности. Таким образом, областью определения последовательности как функции является множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Значением этой функции является число. Если функцию обозначить буквой f, то ее значение в точке n запишется как $f(n)$. Однако для последовательностей традиционно выбирается другое обозначение — члены последовательности обозначаются малыми латинскими буквами — a, b, c и т.д., а значение аргумента n пишется в виде индекса: a_n, b_n, c_n и т.д.

Главная особенность последовательности состоит в том, что значения аргумента (номера членов последовательности) расположены друг за другом, и их можно перебирать, двигаясь от одного номера к следующему. Это позволяет использовать особый способ задания последовательности, который неприменим к функции общего вида и называется *рекуррентным*. При обычных способах задания функции можно взять любое

Числовые последовательности

1. 1, 2, 3, 4, 5, ... $a_n = n$.
2. 1, 4, 9, 16, 25, ... $a_n = n^2$.
3. 1, 2, 4, 8, 16, ... $a_n = 2^{n-1}$.
4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ a_n = \frac{1}{n}$.
5. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ a_n = \frac{n}{n+1}$.
6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Общий член последовательности

$$a_n$$

Последовательность сумм

$\{a_n\}$ — данная последовательность;

$\{s_n\}$ — последовательность сумм:

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

Примеры

1. $a_n = 2n - 1$
   $s_n = n^2$
   $1 + 3 + ... + 2n - 1 = n^2$.

2. $a_n = n^2$
   $s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   1, 5, 14, 30, ...

3. $a_n = 2^{n-1}$
   $s_n = 2^n - 1$
   1, 3, 7, 15, ...

4. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
   $s_n = \frac{n}{n+1}$
   $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$

Последовательность разностей

$\{a_n\}$ — данная последовательность;

$\{d_n\}$ — последовательность разностей:

$d_1 = a_1,$
$d_2 = a_2 - a_1,$
$d_3 = a_3 - a_2,$
$d_n = a_n - a_{n-1}.$

Примеры

1. $a_n = a_1 + d(n - 1)$
   $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, ...$
   $d_n = d$.

2. $a_n = 2^n$
   2, 4, 8, 16, ...
   $d_n = 2^{n-1}$ $(n > 1)$.

3. $a_n = n^2$
   $d_n = 2n - 1$.

4. $\{a_n\}$: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... — числа Фибоначчи;
   $\{d_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, ... — та же последовательность со сдвинутым номером.

значение аргумента и для него найти соответствующее значение функции, не думая об остальных значениях аргумента. При рекуррентном способе для вычисления n-го члена надо знать предыдущие.

2. *Рекуррентные соотношения.* Рекуррентные формулы, выражающие член последовательности через предыдущие, нам встречались и ранее (например, арифметическая и геометрическая прогрессии).

К рекуррентным соотношениям также относятся следующие последовательности:

- Фибоначчи: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;
- факториалов: $a_{n+1} = (n + 1)a_n$;
- квадратов: $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$.

Чтобы задать последовательность, недостаточно только написать рекуррентное соотношение. Необходимо указать также начальные члены последовательности.

Так, арифметическая прогрессия будет однозначно определена, если кроме *разности* d, входящей в рекуррентное соотношение, будет указан первый член a_1.

Для последовательности Фибоначчи нужно знать два первых члена. Если взять $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, то получится стандартная последовательность чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

В последовательности факториалов, приняв $a_1 = 1$, получим, что a_n является произведением натуральных чисел от 1 до n: $a_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$.

Если в последовательности квадратов взять $a_1 = 1$, то n-й член последовательности получится в виде суммы первых n нечетных чисел: $a_n = 1 + 3 + 5 + ... + 2n + 1 = n^2$.

3. *Общий член последовательности.* Последовательность может быть задана и как обычная функция, например формулой общего члена: $a_n = f(n)$. Обычные функции $y = f(x)$, заданные для всех $x \geq 1$, порождают последовательности значений в целых точках: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ..., $a_n = f(n)$, ...

Зная рекуррентное соотношение, часто можно найти формулу общего члена. Нам уже известны формулы общего члена арифметической и геометрической прогрессии.

Формула общего члена для последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ... имеет такой вид: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

4. *Свойства последовательностей.*

1) *Действия над последовательностями.* Так же как над произвольными функциями (заданными на одном и том же множестве), над последовательностями можно производить арифметические операции: сложение (вычитание) и умножение (деление).

Если последовательность $b_1, b_2, ...$ *постоянна*, т.е. $b_n = b$ для любого n, то произведение последовательностей $a_1, a_2, ...$ и $b_1, b_2, ...$ выглядит так: $ba_1, ba_2, ...$ и называется произведением постоянного числа b на последовательность $a_1, a_2, ...$

2) *Функциональные свойства.* Числовые последовательности могут обладать свойствами, которые обсуждались при изучении обычных функций.

Числовая последовательность называется *возрастающей*, если каждый последующий ее член больше предыдущего, иными словами, если для всякого $n > 1$ верно неравенство $a_n > a_{n-1}$ (для *убывающей* числовой последовательности $a_n < a_{n-1}$).

Последовательность называется *монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей.

Последовательность $a_1, a_2, ...$ можно изобразить «графиком», который будет состоять из отдельных точек координатной плоскости. Так же как и для обычных функций, по графику можно судить о различных свойствах последовательностей. Возрастающие и убывающие последовательности изображаются точками, лежащими на графиках монотонных функций.

5. *Ограниченные последовательности.* Последовательность $a_1, a_2, a_3, ...$ называется *ограниченной*, если для ее членов можно указать общую *границу*, т.е. такое число C, что неравенство $|a_n| \le C$ выполняется для всех номеров n.

Если последовательность является возрастающей, то для ее ограниченности достаточно

Сумма двух последовательностей

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ...$

$\{b_n\} = b_1, b_2, b_3, ...$

$\{C_n\} = C_1, C_2, C_3, ...$

где $C_1 = a_1 + b_1$,
$C_2 = a_2 + b_2$,
$C_3 = a_3 + b_3, ...$

Произведение двух последовательностей

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ...$

$\{b_n\} = b_1, b_2, b_3, ...$

$\{d_n\} = d_1, d_2, d_3, ...$

где $d_1 = a_1 \cdot b_1$,
$d_2 = a_2 \cdot b_2$,
$d_3 = a_3 \cdot b_3, ...$

Ограниченные последовательности

$a_n = n;$

$b_n = \frac{1}{n+1};$

$c_n = a_n b_n = \frac{n}{n+1};$

$\{a_n\}$ — возрастает и не является ограниченной;

$\{b_n\}$ — убывает и ограничена: $0 < b_n < 1$;

$\{c_n\}$ — возрастает и ограничена: $c_{n+1} > c_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow (n+1)^2 > n^2 + 2n$; $c_n < 1$.

Правила вычисления пределов последовательности

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

— предел суммы двух последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей;

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

— постоянный множитель можно выносить за знак предела;

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

— предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},$$

если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

— предел частного двух последовательностей равен частному пределов этих последовательностей.

Примеры

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ при $k > 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

4. $c_n = \frac{3n+2}{n+1}$

$$c_n = \frac{3n+3-1}{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 3.$$

5. $\frac{n^2-1}{2n^2+n+1} =$

$$= \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

найти число C такое, что $a_n \le C$ при всех n. Для ограниченности убывающей последовательности достаточно проверить неравенство вида $a_n \ge C$, которое должно выполняться для всех n.

Таким образом, если для всех членов последовательности выполняется неравенство $a_n \le C$ ($a_n \ge C$), то говорят, что она ограничена сверху (снизу). Если мы говорим об ограниченной последовательности, то ясно, что она ограничена как сверху, так и снизу.

6. *Предел последовательности.* Число A называется пределом последовательности a_1, a_2, ..., если начиная с некоторого момента все члены этой последовательности будут сколь угодно мало отличаться от A.

Обозначают предел последовательности латинскими буквами lim (лимит):

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

В этих равенствах предполагается, что все последовательности являются *сходящимися*, т.е. написанные пределы существуют.

7. *Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.* Геометрическую прогрессию называют бесконечно убывающей, если ее знаменатель q по модулю меньше единицы: $|q| < 1$.

Такое название возникло потому, что при $|q| < 1$ общий член прогрессии $a_n = a_1q^{n-1}$ становится сколь угодно малым, бесконечно убывает.

Найдем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q ($|q| < 1$).

Вычислим сумму n ее членов:

$$s_n = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1} = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Разобьем s_n на два слагаемых:

$$s_n = \frac{a_1}{1-q} - a_1\frac{q^n}{1-q}.$$

Первое слагаемое постоянно, а второе бесконечно уменьшается с ростом n, поэтому при сложении членов геометрической прогрессии до бесконечности мы отбрасываем это слагаемое и получаем формулу

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Зачем рассматривают пределы последовательностей?

Рассмотрим число $A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$. Запишем слагаемое в виде последовательности: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ... (формула общего члена $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, или $a_{n+1}^2 = a_n + 2$). Интересующее нас число надо понимать как предел последовательности (a_n):

$$A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ниже будет доказано, что этот предел равен 2, т.е.

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2.$$

Понятно, что одни последовательности имеют пределы (*сходящиеся последовательности*), другие — нет (*расходящиеся последовательности*).

Для доказательства сходимости последовательности часто бывает полезен следующий признак.

Признак сходимости последовательности. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Важным геометрическим примером применения пределов последовательностей является вычисление длины окружности и площади круга как пределов периметров и площадей последовательностей многоугольников.

Пусть дан круг радиуса R. Рассмотрим последовательность M_n правильных n-угольников ($n \geq 3$), вписанных в эту окружность.

Обозначим через p_n периметр M_n, а через S_n — его площадь. Легко представить себе (но непросто доказать), что последовательности p_n и S_n возрастают.

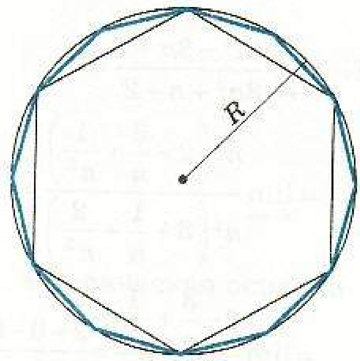
Если p — длина окружности (границы взятого круга), а S — площадь круга, то $p_n < p$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Рассмотрим периодическую дробь $a = 1{,}27777...$, или в общепринятой записи $a = 1{,}2(7)$. Представим дробь в виде $a = 1{,}2 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots$. Очевидно, $a = 1{,}2 + s$, где $s = 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots$ — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $a_1 = 0{,}07$; $q = 0{,}1$. Применим формулу для суммы прогрессии $s = \frac{0{,}07}{1-0{,}1} = \frac{7}{90}$.

Отсюда $a = \frac{108}{90} + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}$.

Вычисление длины окружности и площади круга



$\lim p_n = p$; $\lim S_n = S$

Вычисление пределов последовательностей

1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

Выражение можно преобразовать так:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Будем считать число 1 общим членом «постоянной» последовательности, предел которой конечно равен 1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, что мы, разумеется, знали и раньше (например, когда проводили горизонтальную асимптоту для построения графика функции $y=\frac{x}{x+1}$).

Можно было поступить по-другому: $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ и теперь воспользоваться свойством пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1+0}=1.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{3n^2+n+2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2-0+0}{3+0+0}=\frac{2}{3}.$$

3. Обратить дробь в обыкновенную.

а) $a = 1,444... = 1,(4)$. Число $1,444...$ — это запись суммы $1 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + ...$. Сумму $0,4 + 0,04 + ...$ можно рассмотреть как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = 0,4$ и знаменателем $q = 0,1$. Выполняем подсчеты: $a = 1+\frac{a_1}{1-q}=1+\frac{0,4}{1-0,1}=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}$;

б) $a = 2,3(12) = 2,312121212...$

Запишем равенство: $a = 2,3 + 0,012 + 0,00012 + ... = 2,3 + 0,012\ (1 + 0,01 + 0,01^2 + ...)$.

В скобках стоит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна $\frac{1}{1-0,01}=\frac{100}{99}$. Значит, $a = 2,3 + 0,012 \cdot \frac{100}{99}$...

и $S_n < S$. Это означает, что последовательности p_n и S_n монотонны и ограниченны. Значит, по признаку сходимости, они должны иметь предел. Опять же «геометрически ясно», что $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, т.е. длину окружности и площадь круга можно вычислить как пределы последовательностей периметров и площадей правильных вписанных многоугольников.

Почему надо доказывать существование предела?

Вычислим $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$, перейдя к пределу в рекуррентном соотношении $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, или $a_{n+1}^2=2+a_n$.

Получим, что $A^2 = 2 + A$, где $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Так как $A > 0$, то $A = 2$.

Казалось бы, все обоснованно, и задача решена. Применим такой же метод к последовательности, заданной рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ через A и перейдем к пределу: $A = 2A - 1 \Rightarrow A = 1$. Действительно, если возьмем $a_1 = 1$, то получим, что $a_2 = 2\cdot 1 - 1 = 1$, $a_3 = 1$ и т.д., т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Однако, если $a_1 = 2$, то получим последовательность 2, 3, 5, 9, 17, ..., общий член которой легко угадывается $a_n = 2^n + 1$ (и легко проверяется по индукции), но никакого предела у последовательности $a_n = 2^n + 1$ быть не может. Ошибка состоит в том, что сформулированные (без доказательства) правила обращения с пределами предполагают *существование* пределов всех рассматриваемых последовательностей.

В примере с числом $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$ последовательность $\{a_n\}$ была возрастающей и ограниченной. Действительно, сначала проверим, что $a_n < 2$ при всех n. Применим индукцию: $a_1=\sqrt{2}<2$. Если $a_n < 2$, то $a_n + 2 < 4$ и $\sqrt{a_n+2}<\sqrt{4}=2$, что и утверждалось.

Теперь докажем возрастание последовательности, т.е. $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}>a_n$. Так как

$a_n > 0$, то его можно возвести в квадрат и получить для проверки неравенство $a_n^2 - a_n - 2 < 0$. Решив неравенство $x^2 - x - 2 < 0$, получим промежуток $(-1; 2)$, в котором лежат числа последовательности $(0 < a_n < 2)$. Существование предела полностью доказано.

грессия со знаменателем $q = 0{,}01$. Применяем формулу:

$$2 + \frac{3}{10} + \frac{12}{1000} \cdot \frac{1}{0{,}99} =$$

$$= 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10 \cdot 33} = 2 + \frac{103}{330} = \frac{763}{330}.$$

? Вопросы и упражнения

1. Какими рекуррентными соотношениями определяются прогрессии?
2. Какая последовательность называется ограниченной?
3. Что такое предел последовательности?
4. Какой признак существования предела вы знаете?
5. Чему равна сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии?
6. Какие геометрические величины можно вычислить с помощью пределов последовательности?

Занятие 3
Понятие производной

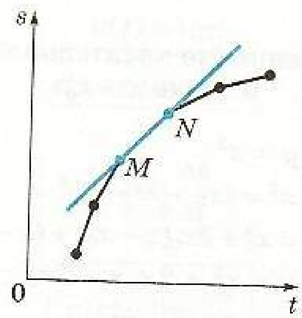
Что понимали под производной основатели математического анализа?

1. *Понятие производной* появилось практически одновременно в работах великих математиков конца XVII в. — И. Ньютона и Г. Лейбница. Ньютон сумел с помощью этого понятия развить представления о механическом движении, а Лейбниц — дать общий способ решения ряда неприступных до этого геометрических задач. Для Ньютона производная — это скорость, для Лейбница производная — это угловой коэффициент касательной. Оба подхода (механический и геометрический) являются одинаково важными и неразрывно связаны между собой, несмотря на кажущееся внешнее различие.

2. *Геометрический смысл производной. Касательной* к графику функции y в точке $x = x_0$ называется прямая, проходящая через точку графика с абсциссой x_0 и тесно прилегающая к графику вблизи этой точки.

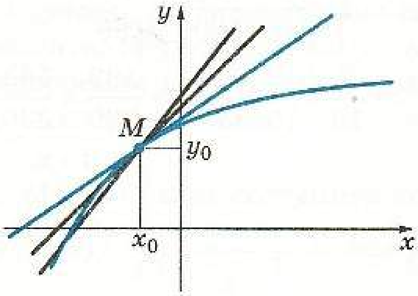
Историческая справка

Определение касательной из первого учебника по математическому анализу (1696 г.)



Если продолжить одно из маленьких звеньев MN ломаной, составляющей кривую линию, то полученная таким образом сторона будет называться касательной к кривой в точке M или N.

Геометрический смысл производной



$M(x_0;\ y_0)$

Среди всех прямых, проходящих через точку M, есть одна, которая прилегает к графику наиболее тесно, — это касательная.

Уравнение касательной

$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

k — угловой коэффициент касательной.

Уравнение касательной в точке $x = x_0$

1) $y = x^2$

$x^2 = (x_0 + x - x_0)^2 =$
$= x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2$
$y = x_0^2 + 2x_0x - 2x_0^2$
$y = 2x_0x - x_0^2;$

2) $y = x^3$

$x^3 = (x_0 + x - x_0)^3 =$
$= x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0) +$
$+ 3x_0(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3$
$y = x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0)$
$y = 3x_0^2x - 2x_0^3$

Уравнение касательной имеет вид $y = y_0 + k(x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, k — угловой коэффициент касательной.

В определении касательной требуют уточнения слова «прямая, тесно прилегающая к графику вблизи некоторой точки». Вначале уточним, как можно оценивать близость к некоторой точке. Возьмем точку x_0. Расстояние от точки x до точки x_0 равно $d = |x - x_0|$. Пусть это расстояние мало. Тогда числа $d^2 = (x - x_0)^2$, $d^3 = |x - x_0|^3$, $d^4 = (x - x_0)^4$, ... быстро уменьшаются (например, если $d = 0{,}01$, то $d^2 = 0{,}0001$, $d^3 = 0{,}000001$ и т. д.). Если какое-то число A представлено в виде $A = A_0 + A_1d + A_2d^2 + A_3d^3 + \ldots$, то ясно, что A_0 является самым грубым приближением к A, $A_0 + A_1d$ — более точным, $A_0 + A_1d + A_2d^2$ — еще более точным и т. д. Обычно бывает достаточно *линейного приближения*, которое получается при отбрасывании слагаемых, пропорциональных квадрату расстояния d и еще более мелких.

Уравнение касательной осуществляет *линейное приближение* к значениям функции вблизи фиксированной точки x_0. Это и есть смысл слов «тесно прилегает». Распознавать уравнение касательной будем так. Если удастся представить значение функции $f(x)$ вблизи точки x_0 в виде: $f(x) = y_0 + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 + \ldots$, то линейное приближение $y = y_0 + k_1(x - x_0)$ и есть уравнение касательной.

Геометрическое определение производной. Производной гладкой функции в точке x называется угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой x.

Производная функции $y = f(x)$ обозначается y' или f'. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

3. *Механический смысл производной.* Рассмотрим движение материальной точки. Пусть дана функция $s = s(t)$, позволяющая вычислить путь, который прошла точка к моменту времени t.

Рассмотрим отрезок времени $[t_1;\ t_2]$. Определим среднюю скорость точки на отрезке $[t_1;\ t_2]$ как отношение пройденного пути к продолжительности движения:

$$v_{ср} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Для определения скорости точки в момент времени t (ее в механике часто называют мгновенной скоростью) поступим так: возьмем отрезок времени $[t;\ t_1]$, вычислим среднюю скорость на этом отрезке и начнем уменьшать отрезок $[t;\ t_1]$, приближая t_1 к t. Замечаем, что значение средней скорости при приближении t_1 к t будет приближаться к некоторому числу, которое и считается значением скорости в момент времени t.

Таким образом, с функцией $s = s(t)$, задающей пройденный путь, можно связать новую функцию $v = v(t)$, значение которой в точке t равно мгновенной скорости.

Если данную функцию $y = f(x)$ понимать как зависимость пути y от времени x, то производной функции y будет скорость этого движения.

Как можно сблизить геометрическое и физическое определения производной?

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на некотором числовом промежутке. Возьмем точку x_0, лежащую внутри этого промежутка. Отступим от точки x_0, возьмем точку x и определим *среднюю скорость* изменения функции на интервале от x_0 до x с помощью следующей формулы:

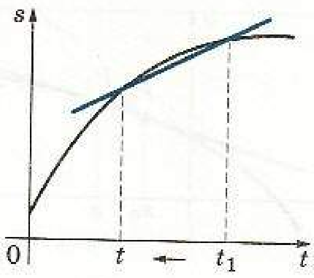
$$v_{ср} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если приближать точку x к точке x_0, то обнаружим, что значение средней скорости $v_{ср}$ приближается к некоторому числу v_0. Это число и называется скоростью изменения функции f в точке x_0, или иначе производной функции f в точке x_0.

Меняя точку x_0 и вычисляя каждый раз значение производной в этой точке, получим новую функцию $y = v(x)$, которую называют производной функции f и обозначают с помощью штриха:

$$v(x) = f'(x).$$

Механический смысл производной



$$s = s(t)$$

$$v_{ср} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Формула средней скорости

$$v_{ср} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Если $x - x_0 = \Delta x$ — приращение аргумента;

$f(x) - f(x_0) = \Delta y$ — приращение функции, тогда

$$\boxed{v_{ср} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Формула скорости в момент времени t

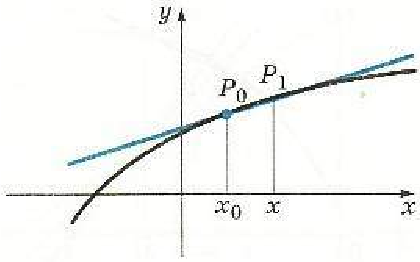
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\boxed{v(t) = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Производная функции

$$\boxed{v(x) = f'(x)}$$

Угловой коэффициент касательной



$$\boxed{k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Видим, что это определение совпадает с определением производной на языке механики.

Теперь вычислим угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0. Отступим от точки x_0, возьмем точку x и проведем секущую через точки P_0 и P графика с абсциссами x_0 и x. Угловой коэффициент секущей вычислим по формуле $k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, т. е. по той же формуле, по которой вычисляется средняя скорость роста функции на промежутке от x_0 до x. Угловой коэффициент касательной можно вычислить, приближая точку x к x_0, т. е. так же, как вычисляется мгновенная скорость.

При вычислении производной применяют традиционные обозначения.

Разность $x - x_0$ называют приращением аргумента и обозначают Δx (дельта икс): $\Delta x = x - x_0$. Разность $f(x) - f(x_0)$ называют приращением функции и обозначают Δy (дельта игрек): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Средняя скорость изменения функции $v_{\text{ср}}$ может быть записана как отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Процесс приближения точки x к точке x_0 можно охарактеризовать как *стремление приращения аргумента к нулю*. Символически этот процесс записывают с помощью стрелки: $\Delta x \to 0$ (Δx стремится к нулю).

Стремление средней скорости $v_{\text{ср}}$ к некоторому числу v_0 также можно записать с помощью стрелки: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to v_0$. Под этой стрелкой (или рядом с ней) обычно помещают исходное условие: $\Delta x \to 0$. Заменяя число v_0 записью значения производной в точке x_0, получим традиционную запись: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x_0)$.

Процесс приближения точки x к точке x_0 называют *предельным переходом* (переходом к пределу). Его результат называют пределом. Используя обозначение предела lim, определение производной можно записать так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная функции f в точке x_0 — это *предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю*:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(читается «эф штрих от икс нуль»).

Если функция f в точке x имеет производную, т. е. существует конечный предел, то функция f называется *дифференцируемой в точке* x.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то говорят, что она *дифференцируема в этом интервале*.

Вычисление производной функции называют *дифференцированием* этой функции.

Дифференцирование, или нахождение производной, — это новая математическая операция, имеющая тот же смысл, что в механике — нахождение скорости, а в геометрии — вычисление углового коэффициента касательной.

Таким образом, для нахождения значения производной в данной точке надо рассмотреть маленький участок изменения аргумента вблизи этой точки. Производная будет приближенно равна средней скорости на этом участке (на языке механики) или угловому коэффициенту секущей (на языке геометрии). Для точного вычисления производной надо совершить предельный переход — стянуть отрезок изменения аргумента в точку. Тогда средняя скорость превратится в мгновенную, а секущая — в касательную, и мы вычислим производную.

Почему нужно предъявлять определенные требования к функции, чтобы вычислить ее производную?

Производная функции $y = f(x)$ — это новая функция $y = v(x)$. Где определена эта функция? При определении производной в данной точке мы прежде всего выбираем эту точку так, что функция $y = f(x)$ была определена в этой точке и во всех точках, близких к ней, чтобы можно было отступить и вычислить значение $f(x)$ не только в выбранной точке x, но и во всех точках, достаточно близких к ней, т. е. точка x должна быть *внутренней точкой* области определения функции f.

Затем необходимо, чтобы существовал предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

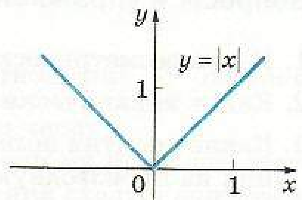
Вопросы *существования* пределов были в центре внимания математиков XIX в., однако для нас они мало существенны, так как для основных функций эти вопросы решаются достаточно просто.

Как найти область определения функции $y = f'(x)$, т. е. производной функции f. Для

Дифференцирование — нахождение производной функции.

Примеры

1. Рассмотрим функцию $y = |x|$.



Найдем производную данной функции.

Производной функции $y = |x|$ будет, как легко вычислить, функция

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, \text{ если } x > 0; \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Область определения этой функции (читается «сигнум») составляют числа $x \neq 0$.

2. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Раскроем модуль.

Если $\Delta x > 0$, то

$$|\Delta x| = \Delta x,$$

а если $\Delta x < 0$, то

$$|\Delta x| = -\Delta x.$$

Получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} +1, \text{ если } \Delta x > 0; \\ -1, \text{ если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Так определенная функция от Δx не может иметь предела при $\Delta x \to 0$.

Поэтому про функцию $y = |x|$ говорят, что у нее не существует производной в точке $x = 0$.

этого надо взять все внутренние точки области определения функции f и *исключить* те точки, в которых мы не сможем вычислить предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Таких точек обычно бывает немного. Геометрически — это те точки, в которых к графику функции $y = f(x)$ нельзя провести однозначно определенную касательную. Типичным примером является точка $x = 0$ функции $y = |x|$.

? Вопросы и упражнения

1. Каков геометрический смысл производной?
2. Каков механический смысл производной?
3. Какие понятия позволяют сблизить геометрическую и механическую точки зрения на производную?
4. Дайте определение производной с помощью понятия предела.
5. Какие требования надо предъявить к функции, чтобы для нее можно было найти производную?
6. Что является областью определения производной?

Занятие 4
Формулы дифференцирования

Примеры

Производная постоянной

1. $y = f(x)$, где $f(x) = c$ — постоянная функция.

Обозначим традиционно значения аргумента через x и $x + \Delta x$ (исходное значение и измененное — исходное плюс приращение). Вычислим приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$ постоянно, поэтому пределом его при $\Delta x \to 0$ надо оставить число 0, т.е. $f'(x) = 0$.

Производная постоянной равна нулю.

Каковы правила вычисления производной?

1. *Правила перехода к пределу.* Так как производная определена с помощью понятия предела, вспомним основные правила обращения с пределами:

- предел постоянной равен самой постоянной;
- предел суммы равен сумме пределов;
- постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Эти правила позволяют вычислить производные некоторых простейших функций.

Результаты первых двух примеров очевидны с точки зрения механики. Если функцию $y = f(x)$ понимать как закон движения по оси y в зависимости от времени x, то линейная функция от x описывает равномерное движение, скорость которого совпадает со средней скоростью на любом интервале изменения времени.

2. *Правила вычисления производной.*

- $(f+g)' = f' + g'$ — производная суммы равна сумме производных;
- $(cf)' = cf'$ — постоянный множитель можно выносить за знак производной;
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ — формула для производной произведения;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ — формула для производной частного.

Первые два правила соответствуют понятию линейности операции дифференцирования.

С помощью правил вычисления производной можно найти производные рациональных функций.

1) Формула производной произведения позволяет найти производную любой степени. Мы вычислили по определению следующие производные: $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$.

Легко догадаться, что при любом натуральном n формула должна иметь такой вид:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Действительно, чтобы получить x^4, надо x^3 умножить на x:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)'x + x^3(x)' = \\ = 3x^2x + x^3 = 4x^3.$$

Аналогично осуществляется переход от любого натурального числа n к следующему:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)'x + x^n(x)' = \\ = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

2) Вычислим производную функции $y = \dfrac{1}{x}$ по формуле производной частного:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Аналогично вычисляется производная функции $y = \dfrac{1}{x^n}$ при любом натуральном n:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Производная линейной функции

2. $y = f(x)$, где $f(x) = ax + b$ — линейная функция.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ = \frac{a(x+\Delta x) + b - ax - b}{\Delta x} = \\ = \frac{ax + a\Delta x + b\Delta x - ax - b}{\Delta x} = \\ = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$$

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равно числу a.

Поэтому пределом этого отношения следует считать число a: $f'(x) = a$.

> *Производной линейной функции будет постоянная функция*, равная коэффициенту при аргументе данной линейной функции.

Производная функции $y = x^2$

3. $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Если $\Delta x \to 0$, то первое слагаемое остается одним и тем же, а второе переходит в нуль:

$$\lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

— *производная функции $y = x^2$ равна линейной функции $y = 2x$.* Символически это можно записать так: $(x^2)' = 2x$.

Производная функции $y = x^3$

4. $y = f(x)$, где $f(x) = x^3$.

Проведем вычисления:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Переход к пределу в таком выражении не составляет труда: первое слагаемое постоянно (не зависит от Δx), а оба других стремятся к нулю. Получаем: $(x^3)' = 3x^2$.

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}}$$

Заметим, что эту формулу можно переписать так: $(x^{-n})' = (-n)x^{-n-1}$. Видим, что она аналогична формуле производной степени с натуральным показателем. Можно объединить две формулы в одну, верную как при положительных, так и при отрицательных целых числах: $(x^k)' = kx^{k-1}$. Формально она верна и при $k = 0$. Далее будет показано, что она верна не только при целых, но и при любых вещественных k.

Производная сложной и обратной функций

- $(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$ — формула производной сложной функции;
- $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ — формула производной обратной функции.

Вывод формулы для производной обратной функции

Пусть f и g — две взаимно-обратные функции. Это, в частности, означает, что $f(g(x)) = x$. Продифференцируем это тождество: $f'(g(x))g'(x) = (x)' = 1$, т.е. $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ — это и есть формула для производной обратной функции. Она имеет наглядный геометрический смысл.

Почему выполняются сформулированные правила дифференцирования?

При доказательстве правил вычисления производной пользуются определением производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента, т.е. как предела средней скорости изменения функции. Посмотрим, как ведут себя средние скорости при арифметических операциях над функциями.

Возьмем две функции f и g, зафиксируем две точки x_0 и x. Среднюю скорость на интервале от x_0 до x запишем как $v_{ср}$.

1) Легко проверить, что $v_{ср}(f+g) = v_{ср}(f) + v_{ср}(g)$ и $v_{ср}(cf) = cv_{ср}(f)$.

Действительно получим $v_{ср}(f+g) =$

$$= \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = v_{ср}(f) + v_{ср}(g).$$

Вторая формула проверяется столь же просто.

Понятно, что при переходе к пределу должно сохраняться то же соотношение. Это следует из правила вычисления предела суммы.

2) Средняя скорость произведения вычисляется сложнее:

$$v_{ср}(fg) = \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}.$$

Чтобы понять, какое нужно сделать преобразование, вспомним такой прием:

$$ab - cd = ab - bc + bc - cd =$$
$$= (a - c)b + c(b - d),$$

применив который, получим

$$v_{ср}(fg) = \frac{\Delta f g(x) + f(x_0)\Delta g}{x - x_0} =$$
$$= v_{ср}(f)g(x) + f(x_0)v_{ср}(g).$$

При переходе к пределу (при $x \to x_0$) $v_{ср}(f)$ перейдет в $f'(x_0)$, $v_{ср}(g)$ — в $g'(x_0)$, $g(x)$ — в $g(x_0)$, и мы получим требуемую формулу. Однако в отличие от предыдущего случая эти переходы требуют применения более глубоких свойств пределов.

3) Вывод формулы для производной сложной функции внешне выглядит достаточно просто.

Пусть $z = f(g(x))$. Функция z записана как композиция функций $y = g(x)$ и $z = f(y)$. Возьмем точки x_0 и x, вычислим $y_0 = g(x_0)$ и $y = g(x)$, а также $z_0 = f(y_0)$ и $z = f(y)$. Составим среднюю скорость z на интервале от x_0 до x: $v_{ср}(z) = \frac{z - z_0}{x - x_0}$. Умножим и разделим на $y - y_0$:
$v_{ср}(z) = \frac{z - z_0}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} = v_{ср}(z(y))v_{ср}(y(x))$.

При переходе к пределу равенство должно сохраниться:

$$z'(x) = z'(y)y'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Функцию z можно понимать как функцию от y. Но неясно, можно ли при этом y понимать как независимую переменную. В частности, если $x \to x_0$, то будет ли $y \to y_0$.

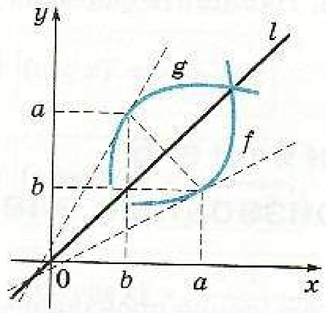
Все эти детали подробно исследуются в общей теории пределов, однако они не должны заслонять главного — как получить замечательные формулы для вычисления производных.

Это и было главным открытием создателей дифференциального исчисления, с которым нам и надлежит познакомиться.

Детальное обоснование всех переходов было проведено через 150—200 лет после их открытия, и все это время формулы безотказно служили для получения новых глубоких результатов.

Графики взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Симметричными будут и касательные, проведенные в соответствующих точках (см. рисунок).



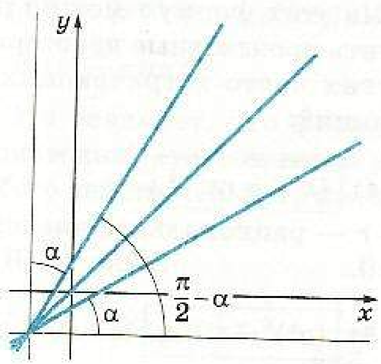
Угловые коэффициенты касательных

Угловые коэффициенты касательных — это тангенсы углов их наклона к оси x.

Так как эти углы в сумме равны $\frac{\pi}{2}$, то произведение их тангенсов равно 1.

Это и означает, что произведение значений производных функций f и g в соответствующих точках равно 1:

$$g'(x_0)f'(y_0) = 1,$$
$$\text{или } g'(x_0)f'(g(x_0)) = 1.$$



Вопросы и упражнения

1. Каковы правила перехода к пределу?
2. Как ведет себя производная при арифметических операциях над функциями?
3. Чему равна производная степенной функции $y = x^n$?
4. Операция дифференцирования линейна. Как вы понимаете смысл этих слов?
5. Напишите формулу дифференцирования сложной функции.
6. Напишите формулу дифференцирования обратной функции.

Занятие 5
Производные элементарных функций

Вычисление производных элементарных функций

Вычисление производной осуществляется по алгоритму, в основе которого лежит понимание формулы, задающей функцию, как цепочку последовательного применения простейших функций.

Таблица производных простейших функций

1) $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},}$

где n — натуральное число;

2) $\boxed{(e^x)' = e^x;}$

3) $\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$

Из этих формул можно получить производные некоторых других часто встречающихся функций:

4) $\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},}$

где r — рациональное число, $r \neq 0$.

5) $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a,}$ $a > 0$, $a \neq 1$;

Что нужно помнить, чтобы продифференцировать любую элементарную функцию?

Элементарные функции получаются из нескольких простейших функций с помощью следующих операций:

- арифметические действия;
- построение сложной функции;
- построение обратной функции.

Как соединяется дифференцирование с этими операциями, нам уже известно.

Напомним основные *правила дифференцирования.*

1. Линейность:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

2. Умножение и деление:

$$(fg)' = f'g + fg';$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2};$$

в частности, $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

Выведенные ранее формулы станут более простыми, если использовать значок $\circ$ для построения сложной функции: вместо $z = f(g(x))$ писать без аргумента $z = f \circ g$.

Тогда формула для вычисления производной сложной функции будет выглядеть следующим образом:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g',$$

в частности, если $g(x) = kx + b$, то имеем:

$$f(kx + b) = kf'(kx + b).$$

Если g — обратная функция к f, то формула для вычисления ее производной будет следующей:

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Почему имеют место приведенные формулы?

1. *Производная показательной функции.* При вычислении производной показательной функции ход рассуждения такой: сначала доказывается, что для любой показательной функции $y = a^x$ производная пропорциональна этой функции, т.е. $y' = ka^x$ при некотором k.

При этом оказывается, что при изменении основания a коэффициент k может принимать любые ненулевые значения.

Затем по определению число e находится как такое основание, при котором $k = 1$, т.е. $(e^x)' = e^x$.

2. *Производные тригонометрических функций.* Зная производную синуса, можно легко получить производные других тригонометрических функций:

1) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x;$$

т.е. $(\cos x)' = -\sin x$;

2) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

6) $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x};}$

7) $\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};}$

8) $\boxed{(\cos x)' = -\sin x;}$

9) $\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};}$

10) $\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};}$

11) $\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};}$

12) $\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};}$

13) $\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2};}$

14) $\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.}$

Из формулы $(e^x)' = e^x$ выводятся такие следствия:

- $a^x = e^{kx}$, где $k = \ln a$.
  Следовательно, $(a^x)' = (e^{kx})' = ke^{kx} = ka^x$;
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$, так как $\ln x = \log_e x$ и функции $y = \ln x$ и $x = e^y$ взаимно-обратные;
  $\log_a x = \dfrac{1}{\ln a}\ln x \Rightarrow (\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln a}$;
- $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \alpha e^{\alpha \ln x}(\ln x)' = \alpha x^\alpha \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Это означает, что формула производной степени верна для любого действительного показателя $\alpha \neq 0$.

В частности,

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Примеры

1. $y = x^3 - 2x^2 + 5$,
$y' = 3x^2 - 4x$.

2. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$,
$y' = \dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,

3. $y = \sqrt[4]{x^5}$, $y = \dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.

4. $y = \sin\omega x$, $y' = \omega\cos\omega x$.

5. $y = \sin 2x + \cos 2x$,
$y' = 2\cos 2x - 2\sin 2x =$
$= 2(\cos 2x - \sin 2x)$.

6. $y = e^{\sin x}$, $y' = e^{\sin x}\cos x$.

7. $y = \dfrac{\sin x}{x}$,
$y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

8. $y = \sin x^2$,
$y' = \cos x^2 \cdot 2x = = 2x\cos x^2$.

9. $y = \operatorname{ctg} x$,
$y' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$
$= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

10. $y = \ln \sin x$,
$y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

т.е. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Производные обратных тригонометрических функций.

1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} =$
$= \dfrac{1}{\cos\ (\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

где $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$ — взаимно-обратные функции, т.е. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'} =$
$= \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x) =$
$= \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$,

где $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$ — взаимно-обратные функции, т.е. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Вывод производных основных функций — показательной и синуса требует значительных дополнительных усилий и не приводится.

Вопросы и упражнения

1. С помощью каких операций можно получить элементарную функцию, исходя из нескольких простейших функций?
2. Каковы основные правила дифференцирования?
3. Производные каких функций достаточно знать, чтобы с помощью правил дифференцирования найти производную любой элементарной функции?
4. Какие функции можно выбрать в качестве простейших и каковы их производные?
5. Назовите устно производные следующих функций:

1) $y = x^{10}$;	4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;	7) $y = \sin\dfrac{x}{2}$;	10) $y = \operatorname{ctg} x$;
2) $y = \dfrac{1}{x}$;	5) $y = 2^x$;	8) $y = 2\cos 3x$;	11) $y = \arcsin x$;
3) $y = \sqrt{x}$;	6) $y = \lg x$;	9) $y = -\operatorname{tg} x$;	12) $y = \operatorname{arctg} 2x$.

Занятие 6

Применение производной к исследованию функций

Как связаны между собой свойства функции и ее производной?

1. *Монотонность функции.*

Пусть функция $y = f(x)$ монотонна на некотором промежутке и имеет производную y' в каждой точке этого промежутка.

> Если функция возрастает на промежутке T, то ее производная во всех точках этого промежутка больше или равна нулю:
>
> $$f \nearrow \Rightarrow f'(x) \geq 0.$$
>
> Если функция убывает на промежутке T, то ее производная во всех точках этого промежутка меньше или равна нулю:
>
> $$f \searrow \Rightarrow f'(x) \leq 0.$$

Для применения производной важны обратные утверждения.

> Если на некотором промежутке производная положительна, то функция возрастает на этом промежутке:
>
> $$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$$

> Если на некотором промежутке производная отрицательна, то функция убывает на этом промежутке:
>
> $$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$$

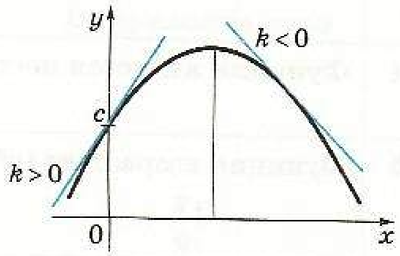
Каков геометрический смысл сформулированных правил? Он становится ясным, если посмотреть на график функции. У возрастающей функции касательная устремлена вверх, а у убывающей — вниз.

Чтобы стал более ясным механический смысл всех связей между свойствами функции и ее производной, объединим связи между понятиями математики и механики в таблицу.

Монотонность функции

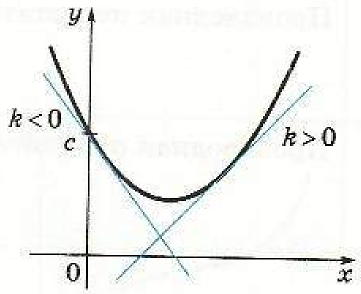
Геометрический смысл

Проведем касательные к графикам функций:



$y = ax^2 + bx + c$

$a < 0 \Rightarrow$ ветви параболы направлены вниз



$y = ax^2 + bx + c$

$a > 0 \Rightarrow$ ветви параболы направлены вверх

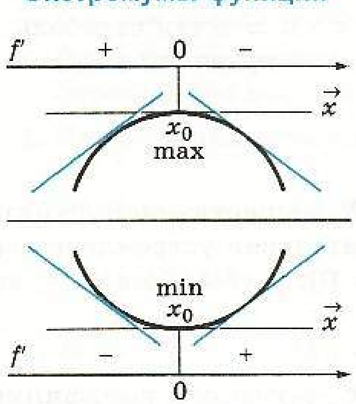
У возрастающей функции касательная устремлена вверх ($k > 0$); у убывающей — вниз ($k < 0$);

k — угловой коэффициент касательной.

2. *Таблица связи между понятиями математики и механики*

№ п/п	Понятие на языке математики	Обозначение	Понятие на языке механики
1	Независимая переменная, аргумент	x	Время
2	Зависимая переменная, функция	y	Положение материальной точки P, ее координата
3	Зависимость y от x, функция	$y = f(x)$	Зависимость координаты точки P от времени. Закон движения материальной точки P
4	Функция является постоянной	$y = \text{const}$	Точка P стоит на месте, ее координата постоянна
5	Функция возрастает (убывает)	$y \nearrow (y \searrow)$	Точка P движется по оси y в положительном (отрицательном) направлении
6	Функция приняла максимальное (минимальное) значение при $x = x_0$ (по сравнению со значениями в близких точках)	$y_{\max}$ ($y_{\min}$) при $x = x_0$	Точка P заняла самое высокое (низкое) положение (по сравнению с положением в близкие к x_0 моменты времени)
7	Производная	$y' = f'(x)$	Скорость (мгновенная)
8	Производная обратилась в нуль	$y' = 0$	Точка P остановилась (ее скорость равна нулю)
9	Производная положительна	$y' > 0$	Скорость точки P положительна (точка P движется в положительном направлении)
10	Производная отрицательна	$y' < 0$	Скорость точки P отрицательна (точка P движется в отрицательном направлении)

Экстремумы функции



$\boxed{f'(x_0) = 0}$

3. *Экстремумы функции.*

Напомним, что экстремумами называют минимумы и максимумы функции, т.е. точки, где она *локально* принимает наименьшее или наибольшее значение.

Термин *локально* (местно) означает, что свойство выполняется *вблизи* данной точки, а не на всей области определения.

Наименьшее (наибольшее) значение функции на всей области определения можно назвать *глобальным* минимумом (максимумом).

Сформулируем основной критерий локального экстремума.

Если гладкая функция имеет экстремум во внутренней точке промежутка T, то в этой точке ее производная обращается в нуль:

$$x_0 \text{ — точка экстремума} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Если в некоторой внутренней точке промежутка производная обратилась в нуль и при прохождении через эту точку сменила свой знак, то в этой точке функция имеет экстремум, т.е.

$$f'(x_0) = 0 \text{ и меняет знак} \Rightarrow$$
$$x_0 \text{ — точка экстремума.}$$

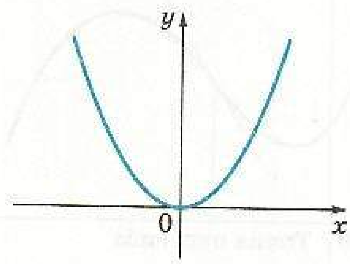
В сформулированном критерии говорится о двух свойствах производной — обращение в нуль в данной точке и смена знака при переходе через нее. Возникает вопрос: «Что происходит, если производная, обратившись в некоторой точке в нуль, при переходе через нее не меняет знак?» Графические примеры приведены на рисунке. Простейшим формульным примером может служить функция $y = x^3$, производная которой $y' = 3x^2$ не меняет знака при переходе через точку $x_0 = 0$. Ясно, что в этом случае одного условия $f'(x_0) = 0$ *недостаточно* для того, чтобы точка x_0 была точкой экстремума.

4. *Выпуклость*. Наглядным свойством графика функции на некотором промежутке является его *выпуклость*. Она может быть направлена как вверх (например, у функции $y = -x^2$), так и вниз ($y = x^2$). Точка, в которой меняется характер выпуклости, называется *точкой перегиба* функции. Если в этой точке провести касательную, то видно, что по одну сторону от точки перегиба график функции начинает уходить выше касательной (с этой стороны график становится выпуклым вниз), а по другую сторону — график уходит вниз (становится выпуклым вверх).

Выпуклость функции и смена ее характера легко определяются с помощью производной:

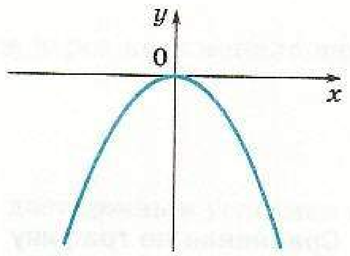
Точки перегиба функции	↔	Точки экстремума производной
Характер выпуклости функции	↔	Характер монотонности производной

Выпуклость



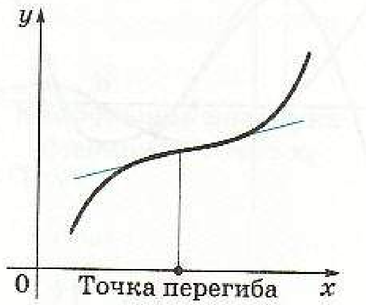
$y = x^2$

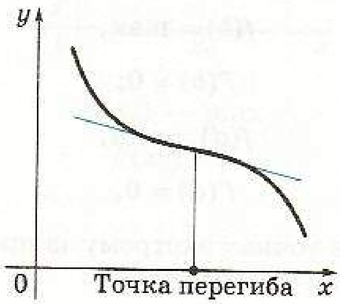
Выпуклость вниз

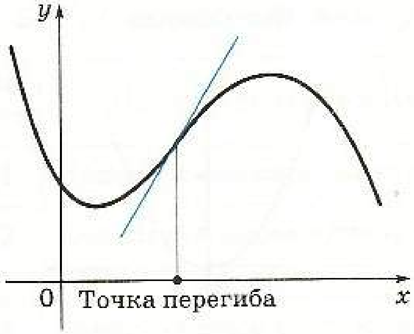


$y = -x^2$

Выпуклость вверх







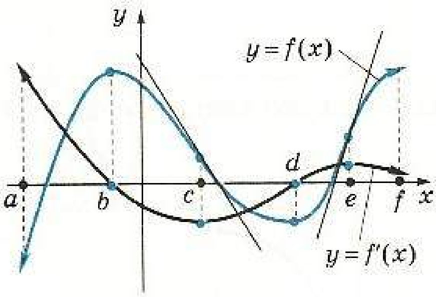
Почему выполняются сформулированные связи между свойствами функции и ее производной?

Полное формульное (аналитическое) доказательство требует развитой техники математического анализа, которая появилась примерно на 150 лет позже обнаружения полезности производной для исследования функций.

Наиболее простым и убедительным аргументом может служить механическая интерпретация производной как скорости. В этом варианте из приведенной ранее таблицы можно извлечь необходимые объяснения.

Геометрическое толкование функции и ее производной достаточно убедительно, поэтому в дальнейшем будем его использовать.

Сравнение по графику поведения функции f и ее производной f'



$y = f'(x)$

$(a; f)$ — область определения функции f и производной f';

b, d — точки экстремума;

$$f(b) = \max,$$

$$f'(b) = 0;$$

$$f(d) = \min,$$

$$f'(d) = 0,$$

т. е. в точках экстремума производная равна нулю.

Как на одном графике сравнить свойства функции и ее производной?

Промежуток или точка	Функция f	Производная f'
$(a;\ b)$	↗	> 0
b	max	$= 0$
$(b;\ d)$	↘	< 0
d	min	$= 0$
$(a;\ c)$		↘
c		min
$(c;\ e)$		↗
e		max
$(e;\ f)$		↘

Вопросы и упражнения

1. Назовите свойства производной, если функция:
   1) возрастает на данном промежутке;
   2) убывает на данном промежутке;
   3) имеет максимум в данной точке;
   4) имеет минимум в данной точке;
   5) выпукла вверх на данном промежутке;
   6) выпукла вниз на данном промежутке;
   7) имеет перегиб в данной точке.

2. Назовите свойства функции, если ее производная:
   1) положительна на данном промежутке;
   2) отрицательна на данном промежутке;
   3) обратилась в нуль в данной точке и при переходе через нее сменила знак с «–» на «+»;
   4) обратилась в нуль в данной точке и при переходе через нее сменила знак с «+» на «–»;
   5) имеет экстремум в данной точке;
   6) монотонна на данном промежутке.

3. Является ли условие обращения производной в нуль достаточным условием экстремума функции?

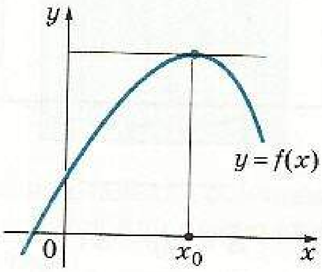
4. Как искать наибольшие и наименьшие значения функции, зная ее точки локального экстремума?

Занятие 7
Прикладные задачи

Как используется в приложениях понятие производной?

1. *Задачи на максимум — минимум.* Так традиционно называют задачи, в которых нужно найти наибольшее или наименьшее значение какой-нибудь величины. Математическая модель этой задачи обычно выглядит так: строится функция $y = f(x)$, у которой нужно найти наибольшее или наименьшее значение на фиксированном промежутке $[a; b]$. Для решения задачи находят точки, «подозрительные» на экстремум: это точки, в которых производная обращается в нуль; точки, в которых производная не существует (нарушается гладкость функции) и концы промежутка. Затем вычисляются значения

Наибольшее значение функции в точке x_0



$f(x_0)$ — max
$f'(x_0) = 0$

функции в этих точках и сравниваются между собой.

Задача 1. Среди прямоугольников данного периметра найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Надеемся, что вам уже известен ответ в этой древнейшей задаче — таким прямоугольником будет квадрат. Напомним ее аналитическое решение. Пусть периметр прямоугольника равен $2p$. Обозначим через x длину одной из сторон прямоугольника, тогда вторая сторона равна $p - x$. Площадь S выразится функцией $S = x(p - x)$, заданной на промежутке $[0; p]$. $S'(x) = p - 2x$. $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2}$. Эта точка лежит внутри заданного промежутка; $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$. Так как $S(0) = S(p) = 0$, то в точке $x = \frac{p}{2}$ площадь принимает наибольшее значение. Если $x = \frac{p}{2}$, то $y = \frac{p}{2}$ и найденный прямоугольник является квадратом.

Задача 2. В данный шар вписать цилиндр наибольшего объема.

Обозначим через R радиус шара, а через r и h соответственно радиус основания и высоту вписанного цилиндра. Как видно из рисунка, выполняется соотношение $\frac{h^2}{4} + r^2 = R^2$.

Вычислим объем цилиндра: $V = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$.

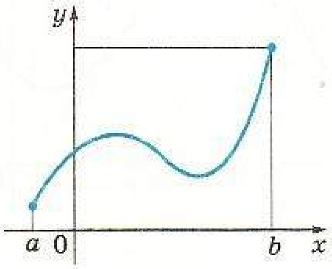
Заметим, что h меняется в пределах от 0 до $2R$, причем на концах отрезка цилиндр вырождается, объем его равен нулю.

Находим критические точки (точки, в которых производная обращается в нуль), считая h переменной: $V' = 0$, $\pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 = 0$, $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

При этом значении h объем будет максимальным: $V_{\max} = \pi r^2 h = \pi R^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3$.

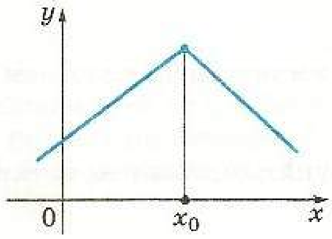
Замечания. 1. Если считать переменной не h, а r, то получим: $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ и $V = 2\pi r^2 =$

Наибольшее значение функции на конце промежутка



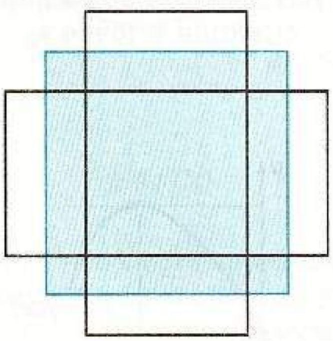
$f(b)$ — наибольшее

В точке x_0 производная не существует



Задачи на максимум — минимум

Задача 1



$S = x(p - x)$

$S'(x) = p - 2x$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2}$.

Наибольшую площадь среди прямоугольников данного периметра имеет квадрат.

$= \sqrt{R^2 - r^2}$. Находить производную V (как функцию от r) в этом случае стало бы труднее, но можно воспользоваться очевидным соображением: функции V и V^2 принимают наибольшее значение одновременно. Тогда можно рассмотреть новую функцию $W = V^2 = 4\pi^2 r^4 = (R^2 - r^2)$ и без труда найти ее критические точки.

2. Функции V, kV $(k > 0)$, $V + c$, V^2 $(V \geq 0)$ принимают наибольшее значение одновременно. Это позволяет при нахождении производных убирать постоянные множители, слагаемые и радикалы.

Задача 3. Над центром круглого стола радиуса r висит лампа. На какой высоте h следует подвесить эту лампу, чтобы на краях стола получить наибольшую освещенность?

Из физики известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света и пропорциональна синусу угла наклона луча света к освещаемой маленькой площадке:

$$E = k\frac{\sin\varphi}{h^2 + r^2},$$

где E — освещенность на краю стола, $\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$; h — расстояние от лампы до стола.

Вместо функции $E = k\frac{h}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$ рассмотрим функцию $T = \frac{1}{k^2}E^2 = \frac{h^2}{(h^2 + r^2)^3}$. При этом вместо h можно взять переменную $z = h^2$ и найти критические точки T как функции от z:

$$T = \frac{z}{(z + r^2)^3},$$

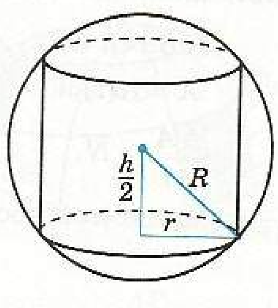
$$T' = \frac{(z + r^2)^3 - z \cdot 3(z + r^2)^2}{(z + r^2)^6} = \frac{z + r^2 - 3z}{(z + r^2)^4};$$

$$T' = 0,\ r^2 - 2z = 0,\ z = \frac{r^2}{2},$$

$$\text{т.е. } h^2 = \frac{r^2}{2} \text{ и } h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Итак, освещенность максимальна, если $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$, т.е. если $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 2



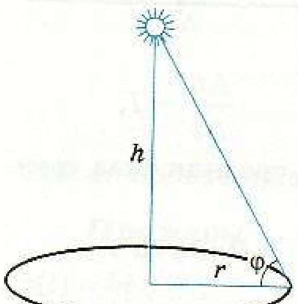
$$0 < h < 2R$$

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Цилиндр, вписанный в шар, имеет максимальный объем

$$V_{\max} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3.$$

Задача 3



Максимальная освещенность достигается при следующих параметрах:

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\varphi \approx 32°.$$

Нахождение скорости протекания процесса

2. *Нахождение скорости протекания процесса.* Так как производная есть скорость роста функции, то всюду, где мы сталкиваемся с какой-либо переменной величиной, полезно рассматривать и ее производную — скорость ее изменения.

Задача 4

$$A = A(t)$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = N,$$

где N — средняя мощность.

Задача 4. *Работа* (как функция времени). Если $A = A(t)$, то средняя скорость изменения работы $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ — есть средняя мощность, а производная работы по времени — мгновенная мощность.

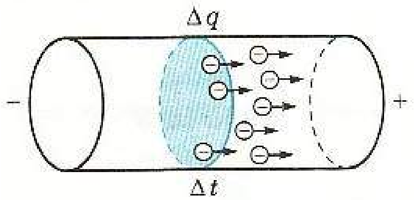
Задача 5

$$\frac{\Delta m}{\Delta l} = \rho,$$

где ρ — средняя линейная плотность.

Задача 5. *Масса тонкого стержня.* Пусть имеется неоднородный тонкий стержень. Если ввести координаты так, как показано на рисунке, то можно рассмотреть функцию $m = m(l)$ — массу части стержня от точки 0 до точки l. «Средняя скорость» изменения массы на отрезке $[l_1, l_2]$ равна $\frac{m(l_2) - m(l_1)}{l_2 - l_1}$. Ее называют в физике средней линейной плотностью. Линейная плотность есть производная функции m, т. е. производная массы тонкого стержня по длине.

Задача 6

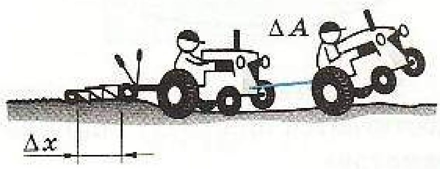


$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = I,$$

где I — средняя сила тока.

Задача 6. *Заряд.* Пусть $q = q(t)$ — заряд, переносимый электрическим током через поперечное сечение проводника за время t. Средняя скорость переноса заряда есть $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ и называется средней силой тока. Если ток постоянный, то $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ — постоянная величина (и заряд q линейно зависит от времени). В общем случае производная от заряда по времени есть сила тока: $I(t) = q'(t)$.

Задача 7



$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = F,$$

где F — средняя сила.

Задача 7. *Работа.* Приращение работы ΔA на малом участке перемещения Δx можно представить как произведение силы F, которая хотя и зависит от x, но ее можно считать постоянной на малом отрезке, на перемещение Δx: $\Delta A = F\,\Delta x$.

Следовательно, среднее значение силы есть $\frac{\Delta A}{\Delta x}$, а сама сила — производная работы по перемещению.

Задача 8. *Давление.* Обычно под этим термином понимают отношение сил к площади поверхности, на которую эта сила действует. Более точно необходимо рассматривать нормальную составляющую силы ΔF_n, и тогда давление представляется как $p = \dfrac{\Delta F_n}{\Delta S}$, т. е. давление можно понимать как производную силы по площади. Однако сила давления зависит не только от площади ΔS, но и от ее местоположения (например, в сводках Гидрометцентра можно услышать, что давление воздуха в Москве 760 мм рт. ст., а в Санкт-Петербурге — всего 735 мм рт. ст.).

Задача 9. *Производительность труда.* Важнейшей экономической характеристикой производства является рост производительности труда. Темпы роста производительности труда — это производная производительности труда по времени.

Задача 10. *Успехи в учебе.* Обсуждая успехи своего ученика, учитель математики так отозвался о нем: «Он очень мало знает, но у него положительная производная». Все поняли, что имел в виду учитель — скорость приращения знаний у ученика положительная, т. е. его знания возрастут. Подумайте, как вы могли бы охарактеризовать три разные кривые роста знаний, изображенные на рисунке.

3. *Вторая производная.*

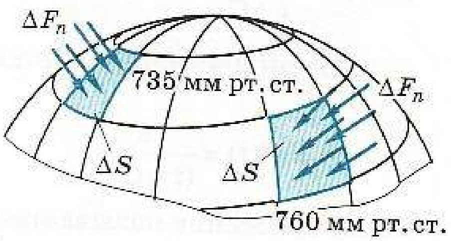
1) *Ускорение.* Ускорение по своему смыслу есть скорость изменения скорости. Если функция $v = v(t)$ задает скорость движения точки по прямой, то производная этой функции есть ускорение: $a(t) = v'(t)$.

Если задана координата $x = x(t)$ точки, то, чтобы найти ускорение, надо сначала продифференцировать функцию x и получить скорость v, а затем еще раз продифференцировать и получить ускорение. Поэтому ускорение называют *второй производной пути (перемещения) по времени* и обозначают так:

$$a(t) = x''(t).$$

Ускорение движения, когда координата x зависит от времени квадратично, постоянно и равно удвоенному коэффициенту при t^2. Из механики известно и обратное — если ускорение постоянно, то перемещение зависит от t по квадратичному закону. Если уско-

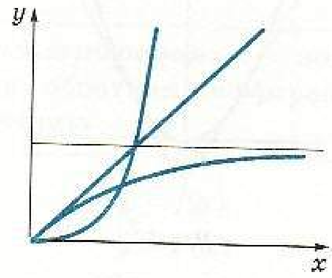
Задача 8



$$p = \frac{\Delta F_n}{\Delta S},$$

где p — давление.

Задача 10



Вторая производная

Примеры

1. $x(t) = kt$,
   $v(t) = x'(t) = k$,
   $a(t) = x''(t) = 0$.

Такое движение называется равномерным, ускорение в этом случае равно нулю.

2. $x(t) = At^2 + Bt + C$,
   $v(t) = x'(t) = 2At + B$,
   $a(t) = x''(t) = 2A$.

Такое движение называется равноускоренным.

3. $x(t) = \frac{1}{t+C}$,

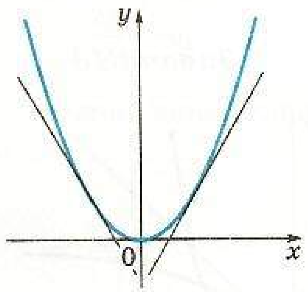
$$v(t) = x'(t) = -\frac{1}{(t+C)^2},$$

$$a(t) = x''(t) = \frac{2}{(t+C)^3}.$$

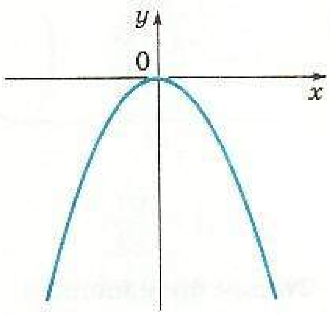
Такое движение называется равнозамедленным.

Мы видим, что направление ускорения противоположно направлению движения, а модуль ускорения убывает очень быстро.

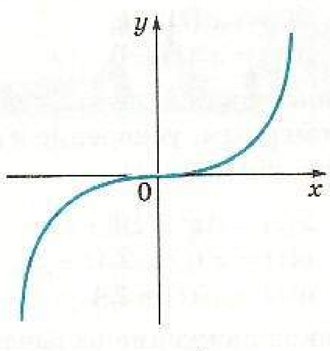
Геометрический смысл второй производной



$y = x^2$



$y = -x^2$



$y = x^3$

рение равно a, скорость при $t = 0$ равна v_0, а положение точки в начальный момент времени есть x_0, то путь задается формулой $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$. Это объясняет смысл коэффициента в квадратичном законе движения.

С помощью второго закона Ньютона, зная ускорение, можно узнать, как изменяется со временем сила $F = ma$.

2) *Второй закон Ньютона.* С движением точки по некоторой кривой связан ряд векторных величин. Важнейшие среди них: **r** — радиус-вектор, характеризующий положение точки; **v** — скорость точки; **a** — ускорение.

Между вектором ускорения **a** и вектором силы **F**, действующей на точку массой m, есть соотношение, являющееся одним из основных в механике: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (второй закон Ньютона).

Если вспомнить, что ускорение является второй производной положения точки, то на соотношение $ma = F$ можно посмотреть как на дифференциальное уравнение движения. В простых случаях из него можно получить зависимость вектора **r** от времени t.

3) *Геометрический смысл второй производной.* Мы уже отмечали, что понятие выпуклости функции тесно связано с поведением производной. Эту связь легко проследить по графику.

Функция выпукла вверх	$\leftrightarrow$	Производная возрастает
Функция выпукла вниз	$\leftrightarrow$	Производная убывает
Точка перегиба	$\leftrightarrow$	Экстремум производной

Так как необходимым условием экстремума функции является обращение ее производной в нуль, необходимым условием перегиба функции будет обращение в нуль производной от ее производной, т.е. второй производной функции.

Пример. Найти точки перегиба функции $y = x^3 - 3x$.

Вычисляем производные: $y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, т.е. график функции имеет перегиб в начале координат.

Вопросы и упражнения

1. Какой прямоугольник данной площади имеет наименьший периметр?
2. Какие величины являются производной:
   а) работы по перемещению;
   б) работы по скорости;
   в) электрического заряда по времени;
   г) силы по переменной площади?
3. Каков механический смысл второй производной?
4. Каков геометрический смысл второй производной?
5. Как найти точки перегиба графика функции?
6. Если вторая производная обратилась в некоторой точке в нуль, обязательно ли график имеет в этой точке перегиб?

Занятие 8
Первообразная

Что такое первообразная?

1. *Определения.* Операция, обратная дифференцированию, называется *интегрированием.* С помощью этой операции для функции $y = f(x)$, вычисляется новая функция $y = F(x)$, производная которой равна функции f: $F'(x) = f(x)$. Такая функция F называется *первообразной* функции f.

Так как производная постоянной функции равна нулю, то $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$. Это означает, что если F — одна из первообразных функции f, то и сумма $F + C$, где C — постоянное число, также будет первообразной f.

Задача интегрирования возникает в процессе поиска некоторой функции F при известной ее производной f. Известно, что производная площади S подграфика функции f равна самой функции f. Следовательно, для нахождения S нужно искать первообразную известной функции f.

2. *Свойства первообразной. Свойства первообразной — это свойства производной, только переписанные в обратном порядке.* Исключение составляет свойство 2, которое означает, что функция, производная которой тождественно равна нулю, обязательно является константой. Это свойство очевидно, так

Интегрирование — операция, обратная дифференцированию

$$y = f(x)$$
$$y = F(x)$$
$$F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ — первообразная функции $f(x)$

Свойства первообразной

1. Если F — первообразная функции f, то функция $F + C$, где C — константа, также является первообразной той же функции f.

2. Обратно, если F_1 и F_2 — две первообразные одной и той же функции f, то они отличаются на постоянное слагаемое: $F_1 = F_2 + C$.

3. Если F и G — первообразные функций f и g, то сумма $F + G$ является первообразной функции $f + g$.

4. Если F — первообразная функции f, то Cf является первообразной функции Cf (C — постоянное число).

Неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных F функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке.

Обозначение:

$$\int f(x)dx.$$

Итак, согласно определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$; C — произвольная постоянная.

Таблица интегралов

$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + C$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
x^n $(n \neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\begin{matrix} n \neq 1 \\ (x \neq 0) \end{matrix}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$(kx + b)^n$ $n \neq -1$	$\frac{1}{k}\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{(kx+b)^2}$	$-\frac{1}{k}\frac{1}{kx+b} + C$
$\frac{1}{\sqrt{kx+b}}$	$\frac{2}{k}\sqrt{kx+b} + C$
$\sqrt{kx+b}$	$\frac{1}{k}\cdot\frac{2}{3}(kx+b)^{\frac{3}{2}} + C$

как с точки зрения механики производная — это скорость. Если скорость тела равна нулю, то тело находится в покое.

Как вычисляют первообразную?

1. Операция дифференцирования совершается формально — нужно запомнить несколько правил, и их будет достаточно для нахождения производных. Не так обстоит дело с интегрированием: например, нет формулы для интегрирования произведения и частного функций. Поэтому составлены обширные таблицы интегралов (первообразных) и появляется новая задача — научиться преобразовывать вычисляемые интегралы в табличные.

2. Одна и та же функция f имеет бесконечно много первообразных, но все они друг от друга отличаются на константу. Знаком неопределенного интеграла $\int$ обозначается *какая-либо* из первообразных. Отсюда ясно, что всякие равенства с использованием знака $\int$ надо понимать с точностью до постоянного слагаемого. Чтобы помнить это, при вычислении первообразных пишут какую-нибудь из них, а затем добавляют постоянную C.

3. *Линейная замена переменной.* Пусть F — первообразная для функции f. Тогда

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Отметим полезные следствия, которые можно внести в таблицу интегралов:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{x-a}$, $x > a$	$\ln(x - a)$
$a^x = e^{x\ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{1}{\ln a}a^x$
$\sin(\omega x + \alpha)$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x+\alpha)$
$\cos(\omega x + \alpha)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x+\alpha)$

Почему первообразная обозначается с помощью знака интеграла?

Мы не стали подробно объяснять, как и почему записываются и вычисляются интегралы. Но читатель, конечно, обратил внимание на запись первообразной в таблице в виде $\int f(x)dx$. Эта запись традиционна, и объяснить ее происхождение несложно. Для нахождения первообразной F необходимо знать линейную часть ее приращения, которая называется *дифференциалом* и обозначается через dF. Дифференциал функции F является линейной функцией от приращения аргумента, т.е. от dx, и записывается в виде $dF = kdx$, где k и есть производная функции F. Поэтому под знак интеграла ставится не только производная, но и ее произведение на dx. Операция интегрирования в чем-то аналогична операции суммирования, и знак $\int$ напоминает букву S, которой обычно обозначают суммы. Подробнее об этом пойдет речь в следующей главе.

Примеры

1. $\int 3x^2dx = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C.$
2. $\int (2x+5)dx = x^2 + 5x + C.$
3. $\int (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + C.$
4. $\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x}} = \int (7-5x)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{2}{5}\sqrt{7-5x} + C.$
6. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

Вопросы и упражнения

1. Что такое первообразная данной функции?
2. Как различаются между собой первообразные одной и той же функции?
3. Назовите первообразные простейших элементарных функций.
4. Как меняется первообразная при линейной замене аргумента?

БЕСЕДА
Формула Тейлора

Общие сведения

При нахождении касательной мы использовали представление функции $y = f(x)$ в виде суммы членов, пропорциональных степеням расстояния от точки x до точки x_0:

$$f(x) = k_0 + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 + k_3(x - x_0)^3 + \dots$$

Такого рода представления связывают с именем английского математика Б. Тейлора, современника И. Ньютона.

Если сама возможность записанного разложения не вызывает сомнений, то коэффициенты k_0, k_1, k_2, ... находятся легко по правилам дифференцирования степеней:

$$((x - x_0)^n)' = n\,(x - x_0)^{n-1}.$$

Подставим в написанное равенство $x = x_0$. Все слагаемые справа, кроме k_0, обратятся в нуль. Получим $f(x_0) = k_0$. Возьмем производную слева и справа. Получим

$$f'(x) = k_1 + 2k_2(x - x_0) + 3k_3(x - x_0)^2 + \ldots$$

Подставляя $x = x_0$, получим $f'(x_0) = k_1$. Дифференцируем еще раз и потом снова подставляем $x = x_0$. Получаем: $f''(x) = 2k_2 + 6k_3(x - x_0) + \ldots$; $f''(x_0) = 2k_2$.

Этот процесс можно продолжать неограниченно. Мы вычислили коэффициенты разложения Тейлора: $k_0 = f(x_0)$, $k_1 = f'(x_0)$, $k_2 = \frac{1}{2}f'(x_0)$, $k_3 = \frac{1}{6}f''(x_0)$, ...

Формула Тейлора может заменить принцип линеаризации, сформулированный при доказательстве свойств функции. Запишем еще раз разложение $f(x)$, подставив значения коэффициентов:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Например, разберем, что происходит с функцией f вблизи точки x_0, если $f'(x_0) = 0$ (выполнено необходимое условие экстремума). Функцию можно разложить так:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

Если $f''(x_0) \neq 0$, то значения $f(x)$ близки к значениям квадратичной функции $y = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$, которая имеет минимум или максимум в точке $x = x_0$ в зависимости от знака коэффициента при x^2 (т.е. от знака $f''(x_0)$).

Если $f''(x_0) = 0$, но $f'''(x_0) \neq 0$, то значения $f(x)$ близки к значениям кубической функции $y = f(x_0) + \frac{1}{6}f''(x_0)(x - x_0)^3$. Ясно, что эта функция имеет перегиб в точке $x = x_0$.

Аналогично с помощью формулы Тейлора можно разобрать условие выпуклости функции. Формула Тейлора очень полезна для приближенного вычисления функций, так как эти приближения происходят с помощью очень простых функций — одночленов вида $k_n(x - x_0)^n$.

Некоторые полезные разложения по формуле Тейлора

Разложения по формуле Тейлора записаны в точке $x_0 = 0$:

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$;
- $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x - \frac{n-1}{2n^2}x^2 + \ldots$;

- $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}x^2+\ldots;$
- $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\ldots$

Пример

Вычислить приближенно корень кубический из 10.

Сначала выполним преобразование:

$$10 = 8 + 2 = 8\,(1 + 0{,}25);$$

$$\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{8(1+0{,}25)}=2\sqrt[3]{1+0{,}25}.$$

Чтобы вычислить $(1+0{,}25)^{\frac{1}{3}}$, не нужно помнить формулу Тейлора. Достаточно знать формулу производной степени: $(x^r)'=rx^{r-1}$, верную не только при натуральных, но и при любых рациональных r. Напишем разложение $(1+h)^{\frac{1}{3}}$ по степеням h:

$$(1+h)^{\frac{1}{3}}=1+k_1h+k_2h^2+k_3h^3+\ldots\;(*)$$

Для нахождения коэффициентов k_1, k_2, k_3, ... будем дифференцировать обе части равенства (*) по h и подставлять $h = 0$.

$$\frac{1}{3}(1+h)^{\frac{1}{3}-1}=k_1+2k_2h+3k_3h^2+\ldots;$$

$$k_1=\frac{1}{3}.$$

Первое приближение a_1 к числу $\sqrt[3]{10}$ мы уже получили: $a_1=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}25\right)=$ $=2{,}1667$.

Дифференцируем равенство (*) еще раз, чтобы улучшить приближение:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(1+h)^{-\frac{2}{3}-1}=2k_2+6k_3h+\ldots;$$

$$k_2=-\frac{1}{9}.$$

Получаем следующее приближение:

$$a_2=a_1+2k_2(0{,}25)^2=2{,}1667-\frac{2}{9}\cdot 0{,}0625=2{,}1528.$$

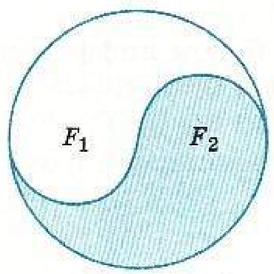
Если нужно еще улучшить приближение, то можно вычислить k_3 тем же приемом.

Первые десятичные знаки числа $\sqrt[3]{10}$ таковы: $\sqrt[3]{10}=2{,}15443\ldots$

ГЛАВА 10 Интеграл и его применение

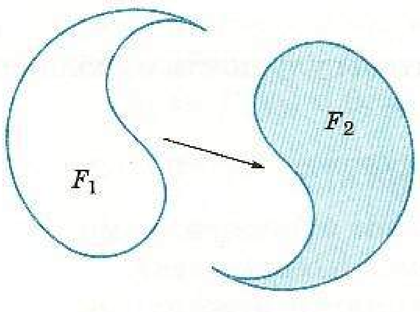
Занятие 1
Площади плоских фигур

Аддитивность



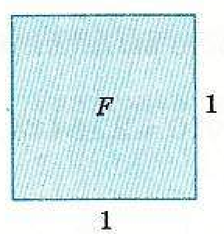
$S(F) = S(F_1) + S(F_2)$

Инвариантность



$S(F_1) = S(F_2)$

Нормированность



$S(F) = 1$

Каковы основные свойства площади?

1. *Измерение площади.* При измерении площади фигуры F получается число $S(F) \geq 0$. За единицу площади (масштаба) принимается квадрат со стороной, равной единице длины.

Основное свойство площади — ее аддитивность: если фигура F разбита на две непересекающиеся части F_1 и F_2, то площадь фигуры F складывается из площадей ее частей.

Площадь можно описать *аксиоматически*, т.е. выделить некоторые основные ее свойства, из которых получить другие свойства и формулы, необходимые для вычисления площади.

2. *Аксиомы площади.*

1) *Аксиома положительности.*

Площадь S каждой измеряемой плоской фигуры F есть неотрицательное число:

$$S(F) \geq 0.$$

2) *Аксиома аддитивности.*

Если фигура F разбита на две части F_1 и F_2, то площадь всей фигуры F равна сумме площадей ее частей: $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.

3) *Аксиома инвариантности.*

Равные фигуры имеют равные площади, т.е. из

$$F_1 = F_2 \Rightarrow S(F_1) = S(F_2).$$

4) *Аксиома нормированности.* Площадь единичного квадрата принимается равной единице: F — квадрат со стороной $1 \Rightarrow S(F) = 1$.

Из аксиом площади можно логически вывести новые свойства.

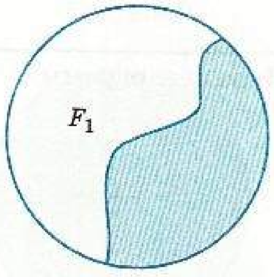
3. *Монотонность площади.* Если фигура F_1 является частью фигуры F_2, то ее площадь не более площади всей фигуры F_2: $F_1 \subset F_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow S(F_1) \le S(F_2)$.

Доказательство. Пусть F_3 — разность фигур F_2 и F_3. По аксиоме аддитивности $S(F_2) =$ $= S(F_1) + S(F_3)$. По аксиоме положительности $S(F_3) \ge 0$, поэтому $S(F_2) \ge S(F_1)$, что и требовалось доказать.

Аксиома аддитивности нуждается в уточнении. Когда говорят, что фигура F разбивается на две части F_1 и F_2, то имеется в виду, что каждая точка фигуры F попадает в одну и только одну из частей F_1 или F_2. Используя символы теории множеств, можно записать, что $F = F_1 \cup F_2$ и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Однако, когда мы разбиваем плоскую фигуру F на две части какой-либо линией, то неясно, к какой из частей отнести точки этой линии. Конечно, хотелось бы под фигурами F_1 и F_2 понимать замкнутые фигуры, т. е. фигуры, содержащие все свои граничные точки. Но тогда точки общей границы будут засчитаны дважды. На практике это несущественно, так как площадь границы должна быть нулевой, что можно легко доказать для отрезка и других простых границ.

4. *Изменение площади при подобном преобразовании.* Если фигуру F преобразовать в подобную ей фигуру F' с коэффициентом подобия k, то площадь новой фигуры $S(F')$ связана с площадью исходной фигуры $S(F)$ соотношением $S(F') = k^2\,S(F)$.

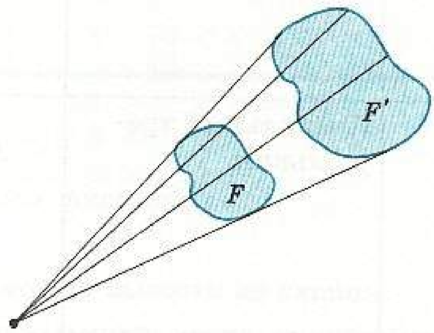
Монотонность площади



$F_1 \subset F_2$

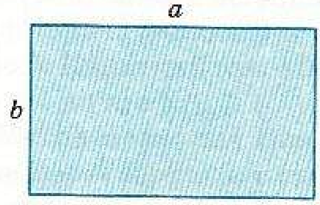
$S(F_1) \le S(F_2)$

Изменение площади при подобном преобразовании

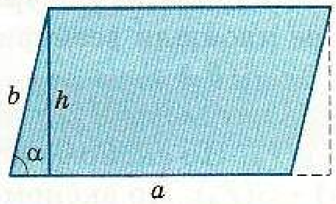
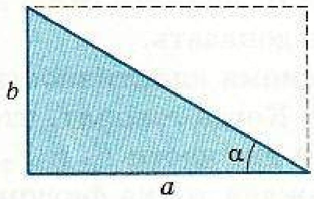
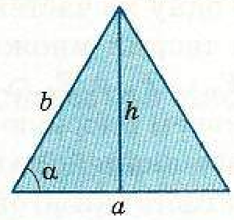
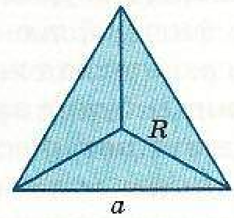
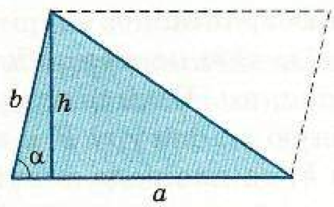
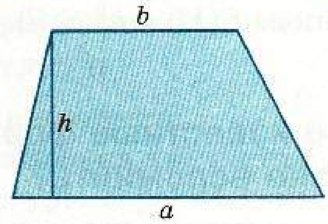
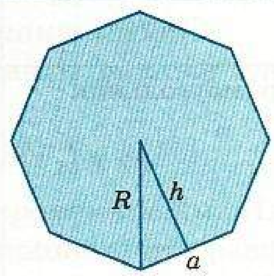


$S(F') = k^2 S(F)$

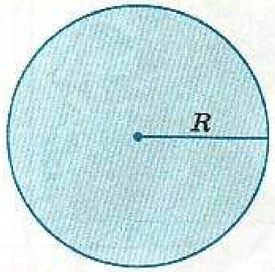
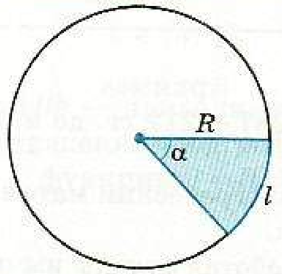
Какие известные формулы для вычисления площади полезно вспомнить?

№ п/п	Фигура	Формула	Рисунок
1	Прямоугольник	$S = ab$	

Продолжение таблицы

№ п/п	Фигура	Формула	Рисунок
2	Параллелограмм	$S = ah = ab\sin\alpha$	
3	Прямоугольный треугольник	$S = \dfrac{1}{2}ab$	
4	Равнобедренный треугольник	$S = \dfrac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}b^2\sin 2\alpha$ $h = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha,\ a = 2b\cos\alpha$	
5	Правильный треугольник	$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ $a = R\sqrt{3}$	
6	Произвольный треугольник	$S = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$	
7	Трапеция	$S = \dfrac{a+b}{2}h$	
8	Правильный n-угольник	$S = \dfrac{1}{2}nah = \dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$ $a = 2R\sin\dfrac{\pi}{n},\ h = R\cos\dfrac{\pi}{n}$	

Окончание таблицы

№ п/п	Фигура	Формула	Рисунок
9	Круг	$S = \pi R^2$	
10	Круговой сектор	$S = \frac{1}{4} lR = \frac{1}{2} R^2\alpha$ $l = R\alpha$	

Вопросы и упражнения

1. Какие свойства площади можно принять в качестве аксиом?
2. Что такое аддитивность площади?
3. Приведите примеры свойств площади, которые можно вывести из аксиом.
4. Запишите формулы для вычисления площади треугольника, круга, прямоугольника, параллелограмма, трапеции.

Занятие 2
Теорема Ньютона — Лейбница

Что нужно сделать, чтобы применить идеи теории функций к вопросам измерения?

1. *Метод исчерпывания Архимеда.* Площадь прямоугольника нам известна исходя из самого смысла понятия площади. Зная ее, легко вычислить площади треугольника, а затем и любого многоугольника, используя аддитивность площади. Площадь криволинейной фигуры естественно измерять приближенно, с помощью сетки из многоугольников. Переход от приближенных вычислений пло-

Историческая справка

Метод исчерпывания Евдокса

Метод исчерпывания при вычислении площадей криволинейных фигур впервые использовал древнегреческий математик талантливый астроном, географ, врач, философ и оратор Евдокс Книдский (ок. 408 — ок. 355 гг. до н. э.).

Метод позволил совершать предельные переходы и стал основой античной теории пределов.

Архимед
(ок. 287 — 212 гг. до н. э.)

Древнегреческий математик и физик.

Разработал методы вычисления площадей, поверхностей и объемов различных фигур и тел, а также разработал способы проведения касательных и нахождения экстремумов, предвосхитивших дифференциальное и интегральное исчисления.

щади к точным связывают с именем Архимеда (III в. до н. э.), предложившим некоторый тип предельного перехода, который стал называться «методом исчерпывания». С помощью этого метода Архимед, например, предложил формулу для вычисления площади параболического сегмента. На современном языке Архимед сумел найти сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$. Метод Архимеда применялся многократно, но каждый раз он требовал специальных приемов для «исчерпывания», т. е. для перехода к пределу.

В конце XVII в. была открыта связь между вопросами измерения и теорией функций. Эта связь в ее простейшем виде сформулирована в виде теоремы, которой дали имена основоположников математического анализа — Ньютона и Лейбница.

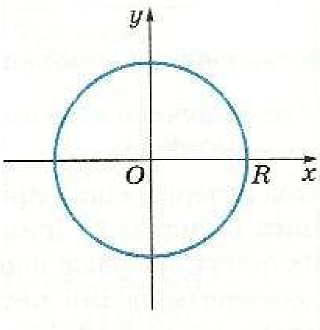
2. *Идея переменной площади.* В основе теории функций лежит понятие переменной, т. е. некоторого процесса, движения. Как заставить меняться фигуру, площадь которой требуется измерить?

Прежде всего поместим фигуру на координатную плоскость и потребуем, чтобы было известно уравнение, которым связаны координаты точек *границы* фигуры.

Например, если круг радиуса R поместить на координатную плоскость xOy с началом в центре круга, то уравнение окружности, ограничивающей этот круг, запишется в виде зависимости $x^2 + y^2 = R^2$. Чтобы перейти от зависимостей к функциям, можно разбить границу фигуры на две части — «верхнюю» и «нижнюю». Так мы придем к понятию «криволинейной трапеции».

Пусть на координатной плоскости дан график неотрицательной функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$.

Идея переменной площади



$x^2 + y^2 = R^2$

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс.

Иногда так построенную криволинейную трапецию называют *подграфиком* функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$.

Теперь можно, не меняя задание функции формулой $y = f(x)$, начать изменять промежуток, на котором она определена. Чтобы упростить ситуацию, можно зафиксировать левый конец промежутка a и менять правый x, т. е. рассмотреть криволинейную трапецию для функции f, заданной на промежутке $[a; x]$ (x меняется от a до b). Можно сказать, что мы двигаем правую стенку криволинейной трапеции и получаем меняющуюся фигуру. Обозначим ее площадь через $S(x)$. Мы связали с функцией $y = f(x)$ новую функцию $y = S(x)$ — площадь переменной криволинейной трапеции. Площадь исходной (постоянной!) фигуры является значением функции S при $x = b$: $S = S(b)$.

3. *Скорость роста переменной площади.* В простейшей формулировке теорема Ньютона — Лейбница утверждает, что скоростью роста функции $y = S(x)$ является функция $y = f(x)$, т. е. производной функции $y = S(x)$ есть функция $y = f(x)$: $S'(x) = f(x)$.

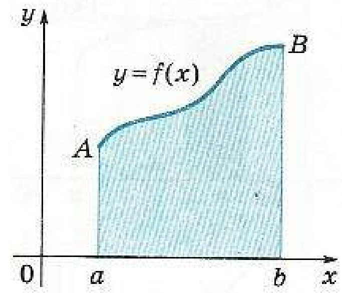
Таким образом, задача нахождения площади переменной криволинейной трапеции оказалась обратной задаче дифференцирования функции. Зная функцию, определяющую границу фигуры, нужно найти функцию, производная которой равна этой функции.

Используя понятие *первообразной*, можно сказать, что площадь переменной криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, является *первообразной* для функции f, точнее «одной из первообразных» функции f, так как функция имеет бесконечно много первообразных.

4. *Формула Ньютона — Лейбница.* Рассмотрим неотрицательную функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $[a; b]$. Пусть $y = F(x)$ — произвольная первообразная функции f, т. е. пусть $F'(x) = f(x)$.

Площадь S криволинейной трапеции, образованной функцией f на отрезке $[a; b]$, равна приращению первообразной этой функции

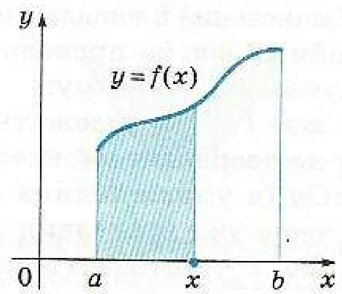
Площадь криволинейной трапеции



$x \in [a; b]$

$aABb$ — криволинейная трапеция (подграфик функции $y = f(x)$)

Переменная площадь



$S = S(x)$

$\boxed{S'(x) = f(x)}$

$F'(x) = f(x)$

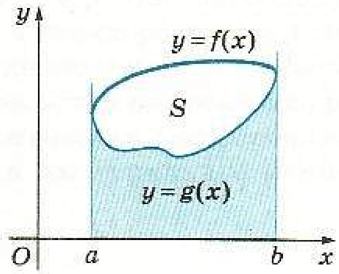
$\Downarrow$

$S(x) = \int f(x)dx + C$

Формула Ньютона—Лейбница

$$\boxed{S = F(b) - F(a)}$$

Вычисление площади с помощью формулы Ньютона — Лейбница



$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Вычисление площади криволинейных фигур проводят по следующему алгоритму:

- *шаг 1* — расположить фигуру на координатной плоскости xOy (в упражнениях этот шаг часто уже проделан);
- *шаг 2* — выразить площадь фигуры через площади криволинейных трапеций, используя свойство аддитивности площади;
- *шаг 3* — вычислить площади криволинейных трапеций с помощью формулы Ньютона—Лейбница, помня, что она была получена для неотрицательных функций.

$$S = F(b) - F(a)$$

— формула Ньютона — Лейбница.

Если знать, что площадь переменной криволинейной трапеции, т. е. функция $y = S(x)$, является *одной* из первообразных, то получить формулу Ньютона—Лейбница, верную для *любой* первообразной, легко. Действительно, искомая площадь S равна значению функции $y = S(x)$ в точке $x = b$, т. е. $S = S(b)$.

С другой стороны, нам известно, что любые две первообразные одной и той же функции различаются на константу, т. е. существует число C такое, что $F(x) = S(x) + C$ при любом x.

Подставим в это равенство $x = a$. Число $S(a)$ равно нулю, так как «трапеция», заданная на отрезке $[a; a]$, сводящемся к точке, является отрезком, площадь которого равна нулю. Итак, $F(a) = 0 + C = C$. Получаем

$$S = S(b) = F(b) - C = F(b) - F(a),$$

что и требовалось доказать.

Почему выполняется утверждение о скорости роста переменной криволинейной трапеции?

Для доказательства теоремы о скорости роста площади поступим так, как всегда поступают при вычислении производной.

Зафиксируем значение аргумента x и дадим аргументу приращение Δx.

Вычислим приращение функции: $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$. На рис. *а* видно, что приращение площади есть площадь подграфика функции f, определенной на отрезке $[x; x + \Delta x]$.

Если Δx достаточно мало, то площадь выделенной на рисунке криволинейной трапеции мало отличается от площади прямоугольника со сторонами $f(x)$ и Δx, т. е. можно записать приближенное равенство

$$\Delta S \approx f(x)\Delta x.$$

Отсюда делаем вывод, что $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \approx f(x)$, т. е. производная функции S равна функции f, что и утверждалось в теореме.

В доказательстве теоремы мы использовали такое соображение: если отрезок $[x;\ x + \Delta x]$ достаточно мал, то площадь подграфика функции f на этом отрезке мало отличается от произведения $f(x)\Delta x$.

Но если в точке x функция f имеет разрыв, то это неверно, что хорошо видно на рис. *б*.

Поэтому в формулировку теоремы о скорости роста площади необходимо добавить требование непрерывности функции f.

Интегральная запись формулы Ньютона — Лейбница. Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на промежутке $[a;\ b]$.

Интегралом от этой функции называется некоторое число, различные определения которого будут рассмотрены в беседе, приведенной в конце главы.

Традиционно определенный интеграл обозначается следующим образом:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx.}$$

Примем сейчас одно из возможных определений интеграла: *интеграл равен приращению первообразной* F, т.е. возьмем за основу формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формулу Ньютона—Лейбница для вычисления площади криволинейной трапеции теперь можно записать в интегральной форме:

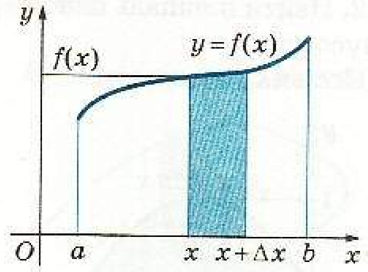
$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx.}$$

Интегральная запись нам будет удобна для вычисления площадей. Переведем в интегральную запись некоторые уже известные нам свойства первообразной:

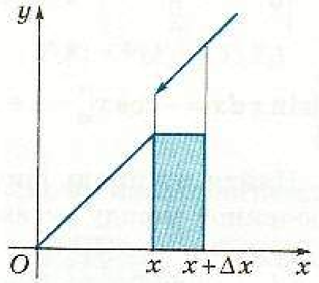
- *независимость от выбора первообразной*:

$\int_a^b f(x)dx$ мы определили как приращение первообразной, не уточнив, какую первообразную имеем в виду.

Доказательство теоремы о скорости роста площади



а



б

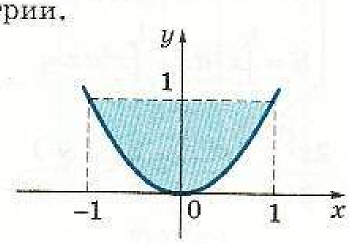
Формула Ньютона—Лейбница (в интегральной форме)

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Примеры

1. Найти площадь параболического сегмента (*задача Архимеда*).

Под параболическим сегментом понимают фигуру, ограниченную параболой и отрезком, перпендикулярным ее оси симметрии.



Выберем систему координат так, чтобы парабола записалась уравнением $y = x^2$, а отрезок соединял точки $(-1;\ 1)$ и $(1;\ 1)$.

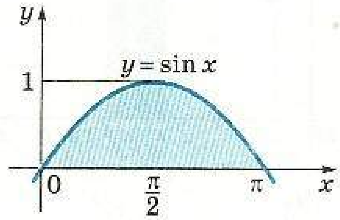
Тогда площадь сегмента запишется в виде интеграла, который легко вычисляется:

$$S = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

То, что гениальный Архимед вычислял путем сложных рассуждений, мы получили практически устно.

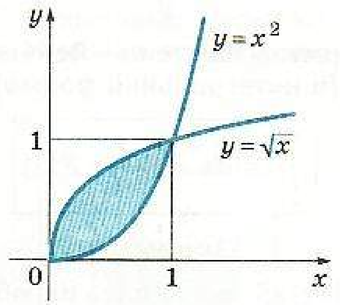
2. Найти площадь одной арки синусоиды.

Искомая площадь



$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=1+1=2.$$

3. Найти площадь фигуры, заключенной между дугами парабол $y = x^2$ и $y=\sqrt{x}$.



Данная фигура ограничена графиками двух функций:

$$f(x) = = x^{\frac{1}{2}} \text{ и } g(x) = x^2.$$

Искомая площадь:

$$S=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^1 x^2dx=$$

$$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Однако *приращение* первообразной (одной и той же функции) на отрезке *не зависит от выбора первообразной*.

Действительно, если F_1 и F_2 — две первообразные, то существует константа C такая, что тождество $F_1(x) = F_2(x) + C$ верно для любого x.

Вычисляем: $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$;

- *аддитивность*:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx.$$

Приведенное определение интеграла делает эту формулу очевидной: $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$;

- *линейность*:

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

— постоянную можно выносить за знак интеграла;

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

— интеграл от суммы функций равен сумме интегралов.

Сумма первообразных для двух функций будет одной из первообразных для суммы этих функций.

Аналогичное утверждение верно и для умножения на константу. Зная это, легко проверить свойство линейности интеграла.

Заметим, что при вычислении интегралов приращение первообразной часто записывается так: $F(b) — F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Вопросы и упражнения

1. Что такое криволинейная трапеция?
2. Как вычисляется площадь криволинейной трапеции с помощью понятия первообразной?
3. Запишите формулу Ньютона—Лейбница.
4. Как можно определить интеграл через первообразную?
5. Каковы основные свойства интеграла?

Занятие 3
Пространственные тела

Что нам известно об объеме?

1. *Аксиомы.*

1) *Аксиома положительности.* Объем V каждого измеряемого тела F есть неотрицательное число: $V(F) \geq 0$.

2) *Аксиома аддитивности.* Если тело F состоит из двух частей F_1 и F_2, то объем всего тела F равен сумме объемов частей: $V(F) = V(F_1) + V(F_2)$.

3) *Аксиома инвариантности.* Равные тела имеют равные объемы: $F_1 = F_2 \Rightarrow V(F_1) = V(F_2)$.

4) *Аксиома нормированности.* Объем единичного куба принимается равным единице: F — куб со стороной $1 \Rightarrow V(F) = 1$.

5) *Аксиома монотонности объема* (выводится аналогично случаю площади). Объем части тела не больше объема всего тела: $V(F_1) \leq V(F)$.

Так же как и в случае площадей, можно доказать, что точка, кривая, поверхность имеют объем, равный нулю. Это позволяет при использовании аддитивности объема разбивать тело на две части некоторой поверхностью (перегородкой) и не заботиться о том, какой части приписать эту поверхность-границу, так как она имеет нулевой объем.

2. *Объемы известных простых тел:*

1) объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин сторон: $V = abc$;

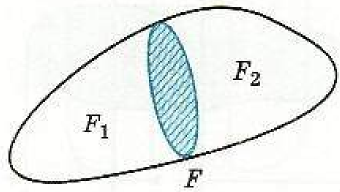
2) объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту: $V = Sh$;

3) объем прямого цилиндра равен произведению площади основания на высоту: $V = Sh$.

Как применить математический анализ для вычисления объема?

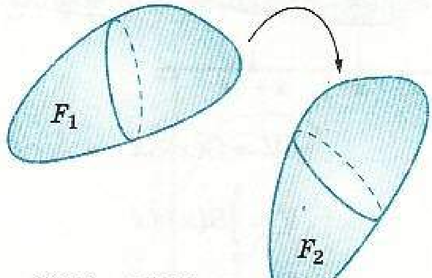
1. *Интегральная формула объема.* Будем исходить из соотношения, связывающего объем и площадь. Рассмотрим тело F, выберем в пространстве некоторую ось x и будем рассекать тело F плоскостями, перпендикулярными оси x.

Аксиома аддитивности



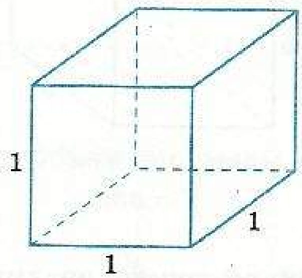
$V(F) = V(F_1) + V(F_2)$

Аксиома инвариантности



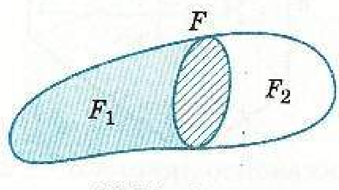
$V(F_1) = V(F_2)$

Аксиома нормированности



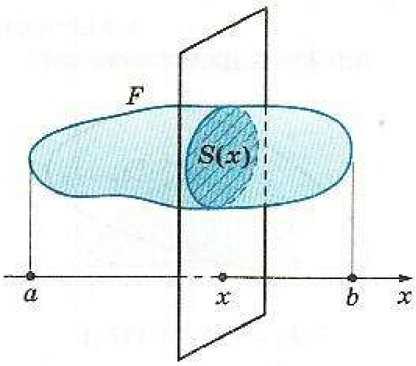
$V(F) = 1$

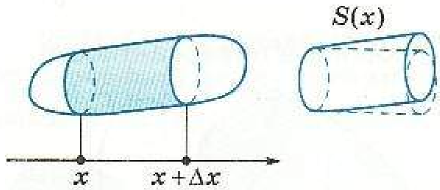
Аксиома монотонности объема



$V(F_1) \leq V(F)$

Интегральная формула объема

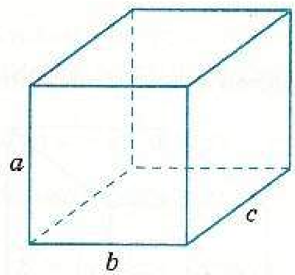




$$\Delta V \approx S(x)\Delta x$$

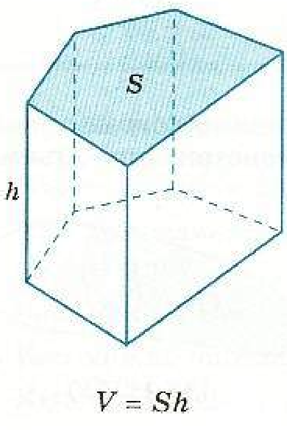
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Объем куба



$$V = abc$$

Объем прямой призмы



$$V = Sh$$

Проекция тела F на ось x представляет некоторый отрезок, концы которого обозначим через a и b. Плоскость сечения будем задавать точкой x на оси: $a \le x \le b$. Площадь сечения, проведенного через точку x, обозначим через $S(x)$. Таким образом, мы построили функцию — площадь переменного сечения: $x \to S(x)$, эта функция определена при $x \in [a, b]$.

Возьмем любые две точки x_1 и x_2 на оси x и рассмотрим часть тела F, заключенную между сечениями, проходящими через x_1 и x_2. Объем такого тела зависит от выбранного отрезка и является интегральной величиной: он положителен и аддитивен по соответствующим аксиомам объема. Чтобы представить объем как интеграл, необходимо найти его плотность.

Для этого рассмотрим часть тела, заключенную между достаточно близкими сечениями — x и $x + dx$. Получаем главную линейную часть изменения объема, если будем считать, что на отрезке $[x, x + dx]$ площадь сечения не меняется и остается равной $S(x)$. Геометрически это означает, что на малом отрезке $[x, x + dx]$ объем части тела заменен близким к нему объемом прямого цилиндра с основаниями $S(x)$. Отсюда получаем формулу для дифференциала объема: $dV = S(x)dx$.

Итак, объем тела представлен как интегральная величина, зависящая от отрезка на оси x, причем плотность этой величины равна $S(x)$ — площади переменного сечения. Используя схему применения интеграла, получаем: $V = \int_a^b S(x)dx$, т.е. объем есть интеграл от площади переменного сечения.

Заметим, что при вычислении объема тела с помощью интегральной формулы направление, в котором проводятся плоские сечения, можно выбирать произвольно. Его обычно выбирают так, чтобы формула для площади переменного сечения была возможно более простой (далее это будет показано при вычислении объемов пирамиды, конуса и шара).

2. *Вывод известных формул.*

1) *Объем наклонного цилиндра.* Сечения наклонного цилиндра плоскостями, параллельными основаниям, имеют постоянную площадь S. Поэтому ось x надо выбрать перпендикулярно плоскостям оснований. Выберем начало 0 на оси x в точке пересечения оси с плоскостью нижнего основания цилиндра, а направление оси укажем снизу вверх. Тогда плоскость верхнего основания пересекает ось x в точке H.

Итак, $S(x) = S$ и $V = \int_0^H S dx = S\int_0^H dx = SH$,

т.е. формулы объема прямого и наклонного цилиндров совпадают.

2) *Объем пирамиды.* Ось x проведем перпендикулярно плоскости основания, тогда в сечениях пирамиды плоскостями, параллельными основанию (а значит, перпендикулярными оси x), будут многоугольники, подобные основанию. Выберем начало на оси x в точке пересечения оси с сечением, проходящим через вершину пирамиды, и направим ось сверху вниз. Тогда плоскость основания пересекает ось в точке $x = H$.

Вычислим площадь переменного сечения $S(x)$. Как уже было сказано, в сечении получается многоугольник, подобный основанию. Коэффициент подобия равен отношению расстояний секущих плоскостей от вершины, т.е. $\dfrac{x}{H}$. Обозначим площадь основания через S. Тогда по теореме об отношении площадей подобных многоугольников имеем:

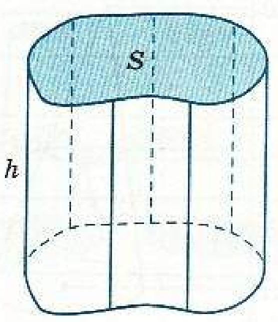
$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2, \text{ т.е. } S(x) = \frac{S}{H^2}x^2.$$

Площадь переменного сечения представлена квадратичной функцией от x. Интеграл от нее вычисляется просто:

$$V = \int_0^H S(x)dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H = \frac{1}{3}SH,$$

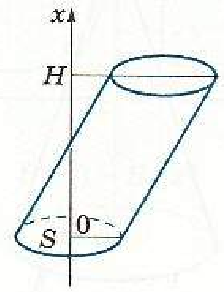
т.е. объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Объем прямого цилиндра



$V = Sh$

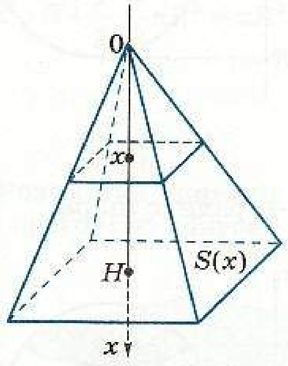
Объем наклонного цилиндра



$V = SH$,

где S — площадь основания;
H — высота цилиндра

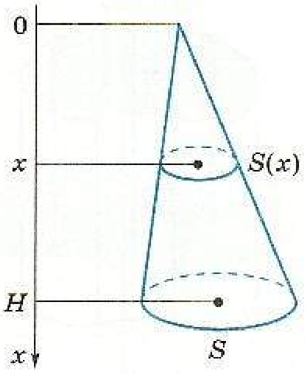
Объем пирамиды



$V = \frac{1}{3}SH$,

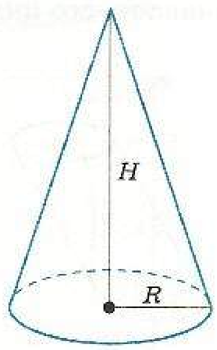
где S — площадь основания;
H — высота пирамиды

Объем конуса



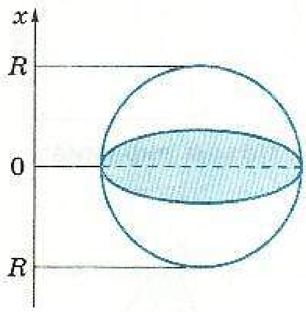
$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S — площадь основания; H — высота конуса



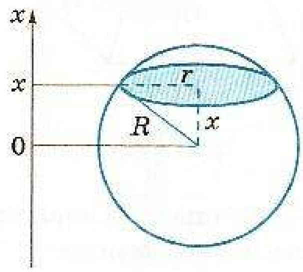
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Объем шара



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара



3) *Объем конуса.* Рассуждения и формулы аналогичны приведенным для пирамиды:

$$S(x) = \frac{S}{H^2}x^2,\ V = \frac{1}{3}SH,$$

т. е. объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. В частности, объем кругового конуса с радиусом основания R и высотой H равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

4) *Объем шара.* В сечении шара любой плоскостью получается круг. Поэтому ось можно выбрать произвольно, а начало удобно взять в точке пересечения плоскости, проходящей через центр шара. Вычислим площадь круга, получающегося в сечении плоскостью, проходящей через точку x. По теореме Пифагора получаем: $r^2 + x^2 = R^2$, откуда

$$S(x) = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

В силу симметрии шара можно найти объем его верхней половины, который получится интегрированием переменной площади от 0 до R. Весь объем V получим удвоением:

$$V = 2\int_0^R S(x)dx = 2\int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx =$$

$$= 2\pi\left(R^2\int_0^R dx - \int_0^R x^2dx\right) = 2\pi\left(R^3 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^R\right) =$$

$$= 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi\frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

т. е. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

3. *Принцип Кавальери.* Если два тела можно расположить так, что основания лежат в одной плоскости, их высоты равны, а сечения этих тел всякой плоскостью, параллельной основанию, равновелики, то тела имеют одинаковый объем.

Этот простой принцип, открытый итальянским математиком Б. Кавальери, легко доказывается с помощью теоремы о производной объема.

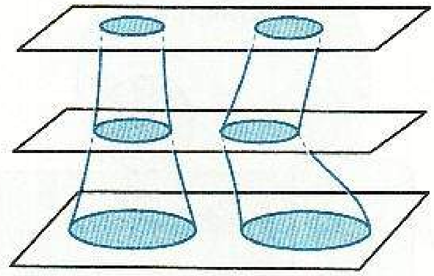
Для двух тел по условию площади переменных сечений совпадают: $S_1(x) = S_2(x)$. Из равенства производных $V_1'(x) = V_2'(x)$ и того, что основания тел лежат в одной плоскости, следует, что значения функций совпадают: $V_1(x) = V_2(x)$.

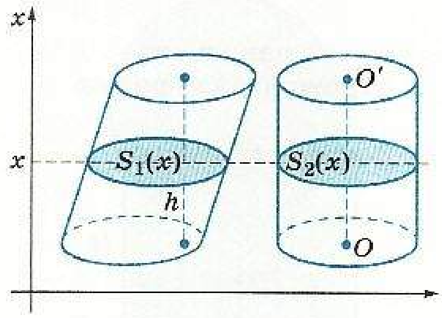
С помощью принципа Кавальери легко доказать замечательную связь между объемами цилиндра, шара и конуса: сумма объемов прямого кругового конуса с радиусом основания R и высотой, также равной R, и полушара радиуса R равна объему прямого кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой R.

Если провести сечение на высоте x от основания цилиндра, то площадь сечения на этой высоте равна πR^2 (она не зависит от x), шара — πr_1^2, конуса — πr_2^2, но $r_1^2 + r_2^2 = R^2$, поэтому сумма переменных площадей сечения конуса и полушара равна площади сечения цилиндра, а по принципу Кавальери это же соотношение будет верно и для объемов. Сравним это геометрическое рассуждение с формулами для объемов.

Проведенное рассуждение было известно еще Архимеду (разумеется, без ссылок на Кавальери, который жил 18 веков спустя).

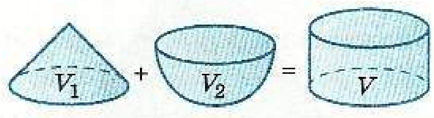
Принцип Кавальери





$S_1(x) = S_2(x)$

Связь между объемами цилиндра, шара и конуса



$V_1 + V_2 = V$

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 \cdot R$$

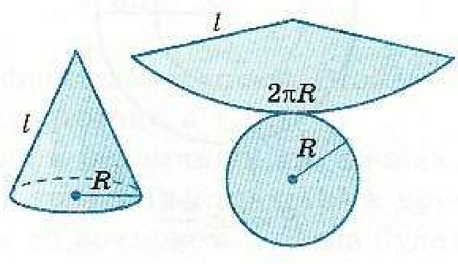
Как измерить площадь поверхности пространственного тела?

1. *Развертки.* Наиболее просто можно вывести формулу площади поверхности тела в том случае, когда его поверхность развертывается на плоскость. Прежде всего это относится к многогранным телам. Поверхность таких тел состоит из многоугольников, площади которых мы уже вычислять умеем, а площадь всей поверхности будет равна сумме площадей всех граней исходя из свойства аддитивности площадей.

Разверткой боковой поверхности прямого кругового конуса является круговой сектор радиуса, равного длине образующей конуса, с длиной дуги, равной длине окружности основания конуса. Применяя формулу для площади кругового сектора, получим

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}2\pi Rl = \pi Rl.$$

Развертка прямого кругового конуса



Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой H

$$\boxed{S_{\text{бок}} = 2\pi RH.}$$

Площадь боковой поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и высотой H

$$\boxed{S_{\text{бок}} = naH.}$$

Площадь боковой поверхности правильной n-угольной пирамиды с основанием a и апофемой (высотой боковой грани) h

$$\boxed{S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}nah.}$$

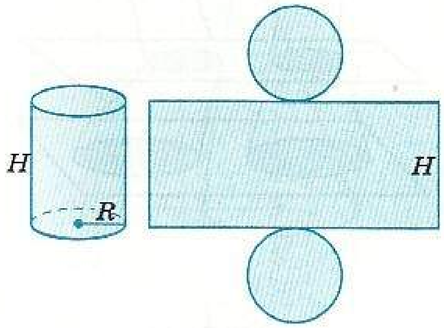
2. *Поверхность шара.* Не для всех тел поверхность можно развернуть на плоскость. Простейшим телом такого вида является шар. Как же измеряется площадь поверхности шара?

На практике о размерах площадей кривых поверхностей можно судить по количеству краски, которую нужно потратить на равномерную окраску поверхности. Предположим, что окрашена только одна сторона некоторой поверхности, и представим себе, что краска нанесена на поверхность равномерно толщиной слоя ε. Количество краски (ее масса) пропорционально объему тонкой пленки, тогда объем пленки V можно приближенно оценить как произведение искомой площади S на толщину слоя ε, причем, чем меньше ε, тем точнее формула $V = S\varepsilon$. Можно вычислить площадь S приближенно как отношение $\dfrac{V}{\varepsilon}$ при малом ε, т.е. за площадь поверхности тела принять предел отношения объема слоя к его толщине при стремлении толщины этого слоя к нулю.

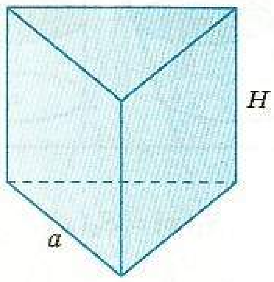
Применим указанную идею для вычисления площади поверхности шара. Возьмем шар радиуса R. Тонкая пленка представит собой тело, заключенное между двумя концентрическими окружностями радиусов R и $R + dR$, где dR — толщина пленки.

Если обозначить объем шара радиуса x через $V(x)$, то объем пленки будет равен

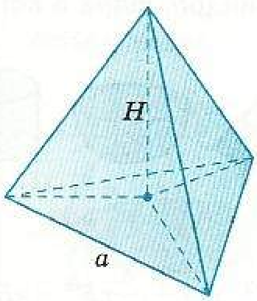
Развертка прямого кругового цилиндра



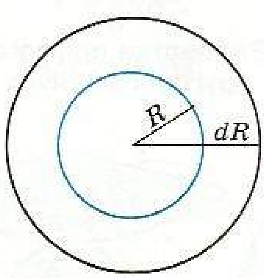
Правильная треугольная призма



Правильная треугольная пирамида



Поверхность шара



$$S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta V}{\varepsilon}$$

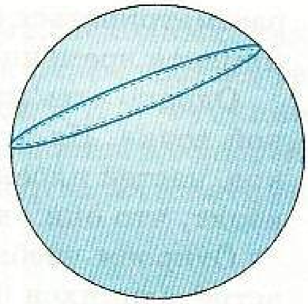
$$V(R + dR) - V(R) = \Delta V,$$

т. е. приращению объема как функции радиуса.

Предел отношения $\frac{\Delta V}{\Delta R}$ есть производная объема шара по радиусу: $S(R) = \frac{dV}{dR}$. Зная формулу объема шара, дифференцированием получаем формулу для площади поверхности:

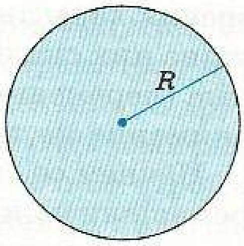
$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow S(R) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2.$$

Интересно заметить, что аналогично поверхности шара можно получить формулы для длин кривых, исходя из площадей. Так, длина окружности получается дифференцированием формулы для площади круга: $S = \pi R^2 \Rightarrow l = S' = (\pi R^2) = 2\pi R$.



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = V' = 4\pi R^2$$



$$S = \pi R^2$$

$$l = S' = 2\pi R.$$

Вопросы и упражнения

1. Перечислите основные аксиомы объема.
2. Напишите формулы для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы, прямого цилиндра?
3. Во сколько раз объем призмы больше объема пирамиды, у которых основания совпадают, а апофема пирамиды равна высоте призмы?
4. Напишите формулы для вычисления боковой поверхности конуса, цилиндра, призмы, пирамиды.
5. Чему равна площадь поверхности шара?

БЕСЕДА

Интегральные величины

Примеры

Многие физические величины являются функциями точки. Этой точкой могут быть точка пространства, момент времени и т. п.

Температура тела может быть вычислена в различных его точках, сила может меняться при переходе от одной точки пространства к другой (например, сила притяжения), а также со временем и тогда будет рассматриваться (при фиксированной точке приложения) как функция момента времени.

Однако есть много величин, которые бессмысленно вычислять в одной точке. Их значения зависят от других объектов, например отрезков, частей плоскости или пространства. Условно про эти величины говорят, что они являются функциями некоторой области.

Откроем учебник физики и выпишем из различных глав названия встречающихся физических величин: время, масса, расстояние, перемещение, скорость, количество движения, сила, работа, энергия, мощность, объем, давление, плотность, температура, электрический заряд, плотность заряда, ток, электрический потенциал, магнитный поток, емкость, сопротивление, индуктивность и т. п. Можно с разных точек зрения характеризовать эти величины. Например, раньше мы выделяли из них скалярные (время, масса, плотность, объем и т. п.) и векторные (перемещение, скорость, сила и т. п.) величины. Обратим теперь внимание на то, от чего зависят и как вычисляются эти величины.

Начнем со связи между простейшими величинами — временем, перемещением и скоростью. Скорость (например, скорость движения точки) — типичная функция времени: в каждый момент времени мы вычисляем значение скорости. Перемещение также зависит от времени, однако характер этой зависимости другой — мы не можем говорить о перемещении в данный момент времени, перемещение вычисляется за отрезок времени. Скорость является функцией точки (момента времени), а перемещение — функцией отрезка. Для каждого отрезка времени мы вычисляем перемещение точки за этот интервал времени.

Рассмотрим теперь массу и ее плотность. Возьмем для определенности какое-нибудь простое тело, например тонкий стержень. Можно говорить о массе всего стержня, а можно — о массе какого-либо его отрезка. Будем считать, что стержень выполнен из неоднородного материала. Каждый отрезок стержня будет иметь определенную массу, и ее можно считать функцией от частей (отрезков) стрежня. Если стержень однороден, то плотность в каждой точке одна и та же, в противном случае плотность может меняться от одной точки к другой. Плотность является функцией точки, а масса — функцией отрезка.

Отрезок — это простейшая область, от которой могут зависеть величины. Так, массу тонкого стержня можно вычислять как функцию отрезка. Массу произвольного тела приходится рассматривать как функцию его частей — для каждой части тела можно вычислить его массу. К числу функций области относят (кроме указанных ранее перемещения и массы) такие величины, как объем, зависящий, как и масса, от части пространства; работу по перемещению материальной точки по какой-либо траектории — как функцию от частей этой траектории; электрический заряд — как функцию от частей пространства, где он вычисляется; магнитный поток — как функцию от частей поверхности, через которую он проходит, и т. д.

Интеграл дает средство для вычисления рассмотренных величин. Величины такого рода будем условно называть интегральными.

Заметим, что в физике в качестве первичных, исходных, величин появляются интегральные величины, такие как перемещение, работа, энергия, электрический заряд, магнитный поток и т. п. Функции точки, такие как скорость, плотность, потенциал, являются в большей мере вторичными, условными, введенными для удобства математического описания физических процессов.

Что такое интеграл?

Коротко можно сказать, что интеграл — это средство, инструмент, математическая модель для вычисления значений интегральных величин. Простейший интеграл служит для вычисления аддитивных величин, зависящих от отрезка прямой, числового промежутка. Опишем различные подходы к введению интеграла. Если стремиться к строгой теории, можно один из них взять в качестве определения, а другие выразить через выбранный. Мы ставим своей задачей ознакомиться с разными взглядами на интеграл, не заботясь об абсолютной строгости, но давая представление о различных путях приложения интеграла как важнейшей математической модели.

Плотность интегральной величины

Чтобы иметь возможность вычислить значение некоторой интегральной величины, которая описана, например, в виде аддитивной функции отрезка, надо знать какие-то ее свойства, характеристики. Такой характеристикой (вслед за аддитивностью) выступает *плотность*.

Пусть T — аддитивная функция отрезка, т.е. $T(l_1 \cup l_2) = T(l_1) + T(l_2)$, где l_1, l_2 — непересекающиеся отрезки.

> *Плотностью* T в точке x называется предел средней плотности, т.е. предел $\dfrac{T(x,\ x+\Delta x)}{\Delta x}$, когда $\Delta x \to 0$.

Слово «*плотность*» связано с массой. Как определить плотность распределения массы в данной точке P? Нужно взять кусок E этого тела, содержащий точку P, разделить массу тела E на его объем: $\dfrac{m(E)}{V(E)}$ — получим среднюю плотность. Затем надо стягивать тело E в точку P и в пределе получим число $\rho(P)$ — плотность в точке P. Аналогичную процедуру можно проделать с любой аддитивной функцией; ограничимся функцией отрезка.

Видим, что определение плотности аддитивной функции отрезка очень близко к определению производной функции точки.

Действительно, всякую аддитивную функцию отрезка можно представить как приращение некоторой функции точки. Пусть T — аддитивная функция отрезка. Зафиксируем некоторую точку a и положим: $F(x) = T(a,\ x)$. Теперь $F(x)$ — функция точки, причем $\Delta F = T$, так как

$F(x_2) - F(x_1) = T(a, x_2) - T(a, x_1) = T(x_1, x_2)$ в силу аддитивности функции T. Обычно не вводят нового обозначения F, а пишут: $T(x, x + \Delta x) = \Delta T$.

Такая связь между аддитивными функциями области и обычными функциями точки имеет место только для прямой. На плоскости и в пространстве все гораздо сложнее, и там аддитивные функции (работа, заряд и т. п.) нельзя представить в виде «приращения» функции точки.

Если T представить как приращение функции точки F, то

$$T(x, x + \Delta x) = F(x, x + \Delta x) - F(x) = \Delta F;$$

$$\frac{T(x, x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Получили, что плотность аддитивной функции T является производной функции $F(x) = T(a, x)$.

> *Плотностью аддитивной функции* T называется такая функция f, что главная часть приращения T равна fdx, т.е. $dT = fdx$.

Для площади подграфика это означает, что ее плотностью является производная от переменной площади.

Итак, с каждой аддитивной функцией отрезка мы связываем функцию точки — плотность, которая является производной от «переменной» величины T, т.е. от $T(a, x)$.

Если, как обычно, обозначить $T(x, x + \Delta x)$ через ΔT, то получим, что $\frac{\Delta T}{\Delta x} \approx f(x)$, или $\Delta T \approx f(x)\,\Delta x$, где $f(x)$ — плотность аддитивной функции f. Обозначим главную часть ΔT через dT (и заменив, как обычно, Δx на dx), получим равенство $dT = fdx$. Это равенство может служить определением плотности f.

Интеграл как аддитивная функция с заданной плотностью

Задача нахождения плотности аддитивной функции T привела к задаче нахождения производной. Обратно, восстановление аддитивной функции T по ее плотности f называется интегрированием, а само значение функции T на отрезке $[a, b]$ — интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$.

> *Интегралом* от функции f называется аддитивная функция T с заданной плотностью f.

Соотношение между T и f, записанное в дифференциальной форме в виде $dT = fdx$, с помощью знака интеграла записывается так:

$$T = \int_a^b fdx.$$

Интегральные суммы

Метод исчерпывания Архимеда разбивается на два шага — разбиение искомой величины на малые составляющие и измельчение этого разбиения — переход к пределу.

Если длины всех отрезков достаточно малы, то сумма S_n достаточно близка к площади криволинейной трапеции. Суммы вида S_n называют интегральными суммами. С их помощью можно дать другое определение интеграла — как предела интегральных сумм S_n при неограниченном уменьшении длины Δx_i всех отрезков. Исторически идея разбиения площади (и других интегральных величин) на малые части и приближенное представление ее в виде интегральной суммы предшествовала появлению производной. Она была знакома еще Архимеду. Открытая Ньютоном и Лейбницем связь между производной и интегралом казалась вначале очень неожиданной.

Если нам известна функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$ и являющаяся плотностью искомой интегральной величины, то можно составить интегральные суммы для этой функции.

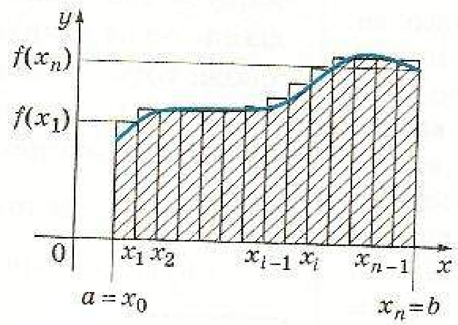
Разделим отрезок $[a; b]$ на n частей точками $x_0 = a,\ x_1, \ldots, x_n = b$.

Длину i-го отрезка обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Составим сумму $S_n = f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n$.

Геометрически эта сумма представляет собой площадь ступенчатой фигуры, заштрихованной на рисунке.

Задание интеграла с помощью интегральных сумм в основном используется для его приближенного вычисления. Если разбить отрезок $[a, b]$ на n равных частей, то интегральная сумма примет следующий вид: $S_n = (f(x_1) + \ldots + f(x_n))\,\Delta x$, где Δx — длина промежутка, равная $\frac{b-a}{n}$. Увеличивая n, будем получать последовательность приближенных значений интеграла $S = \int\limits_a^b f(x)dx$. Приближенная формула $S \approx S_n$ носит название «формулы прямоугольников».



$$S_n = \left(f(x_1) + f(x_2) + f\ldots + f(x_n)\right)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

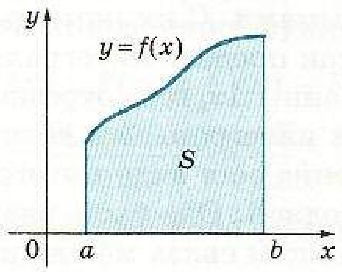
Итак, можно выделить три подхода к определению интеграла от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

- интеграл как приращение первообразной функции f:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

При этом нужно помнить и о том, что приращение первообразной не зависит от выбора первообразной;

- интеграл как площадь S криволинейной трапеции.



Это имеет смысл только для неотрицательной функции f. Однако от этого требования легко освободиться, если площади частей трапеции, попавших ниже оси абсцисс, брать со знаком «минус»;

- интеграл как предел интегральных сумм для функции f.

ГЛАВА

11 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Занятие 1
Вероятность и ее свойства

Что такое вероятность события?

1. *Пространство событий.* Рассмотрим некоторое явление (эксперимент, игру, *испытание*). Будем считать, что с явлением можно связать *элементарные события* (*исходы испытания*), из которых можно составлять более сложные события.

2. *Классическое определение вероятности.* Рассмотрим явление, имеющее конечное число исходов n (элементарных событий). Будем считать, что все эти исходы равноправны (равновозможны или *равновероятны*). Припишем каждому из них дробь $\frac{1}{n}$ — вероятность этого события.

Теперь возьмем сложное событие, которое определяется некоторым набором возможных исходов. Исходы, которые входят в этот набор, часто называют *благоприятными*. Пусть число благоприятных исходов равно m $(0 \le m \le n)$. Припишем этому событию число $\frac{m}{n}$, которое и считают вероятностью данного события.

Если событию соответствует m благоприятных исходов, а всего в результате испытания может быть n равновероятных исходов, то *вероятностью* p этого события называется число $\frac{m}{n}$.

Примеры

1. *Бросание монеты.* У этого испытания два исхода — монета падает «орлом» или «решкой». Их можно считать элементарными событиями. Более сложные события составить трудно, но в пространство событий можно включить одно *невозможное* событие — при бросании не выпал ни «орел», ни «решка» (монета стала на ребро), и одно событие, которое произойдет наверняка, — выпадет «орел» или «решка» (такое событие называют *достоверным*).

2. *Бросание игрального кубика с шестью цифрами.* Можно выделить 6 элементарных событий — на верхней грани кубика оказывается определенная цифра. Если нас интересует событие, при котором выпадает не фиксированная цифра, а любая из каких-то заранее выбранных (например, четная цифра или цифра, бо́льшая 4), то такое событие можно считать сложным.

3. *Выбор одной карты из колоды в 32 карты.* Этот пример аналогичен предыдущему. С помощью 32 элементарных событий (выбор конкретной карты)

можно сформировать события, задавая свойство, которому должна удовлетворять карта (например, она должна быть картой бубновой масти).

В совокупности все рассматриваемые элементарные и сложные события составляют некоторое множество, которое будем называть *пространством событий*. В пространство событий попадет и невозможное событие (пустое множество) и достоверное событие (хоть что-нибудь произошло).

В примере 2 невозможное событие в результате бросания кости — никакая цифра не появилась, а достоверное событие — выпала любая из 6 цифр.

Вероятность события

$$\boxed{p = \frac{m}{n},}$$

где m — число благоприятных исходов; n — общее число испытаний.

Примеры

1. Вычислить вероятность выпадения четной цифры при бросании игрального кубика:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Вычислить вероятность выбора карты бубновой масти:

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Свойства вероятности события A

1. $0 \le p(A) \le 1$.
2. $p(A) = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$ (событие невозможно).
3. $p(A) = 1 \Leftrightarrow A = S$ (достоверное событие).
4. Если $A \cap B = \varnothing$, то $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (несовместные события).
5. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ (противоположное событие).

3. *Свойства вероятности.* На примере классической вероятности легко рассмотреть многие понятия теории вероятностей, которые затем обобщаются и применяются в более сложных ситуациях.

Итак, у нас есть множество S из n равновероятных элементарных событий и множество M всех связанных с S событий. Каждый элемент множества M определяется набором благоприятных для него элементарных событий, т.е. подмножеством множества из n элементов.

Ясно, что M состоит из 2^n событий (каждое элементарное событие может произойти, а может и не произойти в результате испытания).

Если $A \in M$, т.е. A — какое-то сложное событие, то его вероятность

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятных для него элементарных событий, которое часто обозначают так: $|A| = m$; n — число всех элементарных событий.

Два события A и B (т.е. два подмножества S) называются *несовместными*, если у этих подмножеств нет общих элементов: $A \cap B = \varnothing$. Ясно, что любые два элементарных события несовместны. В примере с бросанием кубика такие события, как «выпало четное число» и «выпало 1 или 3», несовместны. В примере с картами несовместными будут события «выпала карта бубновой масти» и «выпала карта черной масти».

Пусть A — некоторое событие. *Противоположным* ему событием называется событие не A, т.е. «не произошло A». Обозначим его через $\bar{A}$. Ясно, что $|A| + |\bar{A}| = n$, т.е. $\bar{A}$ как подмножество S состоит из всех элементов, не входящих в A (дополнение к A):

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

Действительно, если $m = |A|$, то $|\bar{A}| = n - m$ и $\dfrac{n-m}{n} = 1 - \dfrac{m}{n}$.

Как вычислять вероятности, следуя классическому определению?

Рассмотрим примеры вычисления вероятности.

1. Произвольно используя буквы *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*, случайным образом пишут слово, состоящее из четырех букв (буквы могут повторяться). Какова вероятность того, что все буквы в этом слове гласные?

Общее число n возможных слов: $n = 6^4$. По условию, на каждом из четырех мест слова *независимо* пишется любая из шести букв. Благоприятное событие — слово состоит только из гласных букв (их в списке две — буквы *а* и *е*). Число «благоприятных слов»: $m = 2^4$ — на каждом из четырех мест слова пишется какая-либо из двух гласных букв.

Искомая вероятность: $p = \frac{m}{n} = \frac{2^4}{6^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \approx 0{,}012.$

2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что на них в сумме выпадет 6 очков?

Возможные исходы события таковы: может выпасть в сумме 2, 3, ..., 12 очков, т.е. общее количество исходов равно 11. Однако, если в первом примере все перечисленные исходы были равновероятны (это подчеркивалось тем, что каждая буква слова пишется независимо от предыдущих), то сейчас, конечно, нет. Совершенно ясно, что сумму 2 или 12 получить труднее, чем сумму 6. Разобьем событие (сумма очков на двух костях) иначе, т.е. выделим иные элементарные события, которые будут равновероятными. Представим себе, что мы различаем между собой кости (например, покрасим их в разные цвета) и запишем исход события в виде упорядоченной пары чисел от 1 до 6, показывающей, сколько очков выпало на каждой кости. Ясно теперь, что эти исходы равноправны, равновероятны, и их количество равно $6^2 = 36$. Для нахождения числа благоприятных исходов (таких пар $(a; b)$, что $a + b = 6$) придется перебрать все 36 комбинаций (см. табл.).

Алгоритм вычисления вероятности

- *Шаг 1.* Перечисление всех элементарных равновероятных событий и нахождение их числа n.
- *Шаг 2.* Выявление всех благоприятных событий и подсчет их числа m.
- *Шаг 3.* Составление дроби $p = \frac{m}{n}$.

Первые два шага являются задачами комбинаторики.

Пример

Бросают две игральные кости.

Найти: p — вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков.

Ответ: $p \approx \frac{5}{36} \approx 0{,}14.$

Таблица благоприятных исходов

Исход		b					
		1	2	3	4	5	6
a	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

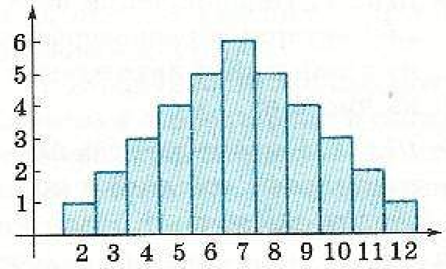
Выпишем вероятности p_x для всех сумм x от 2 до 12:

$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36},\ p_3 = p_{11} = \frac{2}{36},$$

$$p_4 = p_{10} = \frac{3}{36},\ \ p_5 = p_9 = \frac{4}{36},$$

$$p_6 = p_8 = \frac{5}{36},\ \ p_7 = \frac{6}{36}.$$

Диаграмма изменения вероятности



Количество вариантов, откладываемое на вертикальной оси, пропорционально вероятности выпадания определенной суммы очков, откладываемой на горизонтальной оси.

Диаграмму изменения вероятности называют также *рядом распределения* вероятностей.

Из таблицы видно, что сумма 6 встречается 5 раз. Искомая вероятность равна $\frac{5}{36} \approx 0{,}14$.

3. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что в сумме на них выпадет не больше четырех очков?

Сложное событие (выпадает не больше четырех очков) можно разбить на более простые: выпадает 2, 3 или 4 очка. При этом важно следующее: если произошло сложное событие (выпало не более четырех очков), то произошло хотя бы одно из более простых событий (выпало 2, или выпало 3, или выпало 4 очка); никакие два из них не могут произойти одновременно (эти события *несовместны*). В таком случае говорят, что событие A (выпало не более четырех очков) представлено в виде *суммы несовместных событий* A_2 (выпало 2 очка), A_3 (выпало 3 очка) и A_4 (выпало 4 очка).

Ясно, что $p_A = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

? Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры явлений (испытаний), у которых можно выделить конечное число равновозможных исходов.
2. Дайте классическое определение вероятности события.
3. Какие события называют несовместными?
4. Являются ли несовместными некоторое событие и ему противоположное?
5. Если явление имеет 10 возможных исходов, то сколько элементов содержит множество всех связанных с этим явлением событий?

Занятие 2
Повторные испытания

Задача

Чему равна вероятность p_k события A_k: при n бросаниях монеты ровно k раз выпадет «орел» (и следовательно, $n - k$ раз выпадет «решка»)?

Что получится, если монету бросать много раз подряд?

Простейшим, но очень важным примером применения теории вероятностей является так называемая схема повторных испытаний.

Эта схема была предложена замечательным учеником Лейбница Яковом Бернулли (1654—1705) и носит его имя.

Ситуация, в которой подряд независимо друг от друга производятся одинаковые испытания, встречается очень часто (например, бросание монеты или игральной кости, стрельба из одного орудия без учета результата произведенных выстрелов, параллельное включение в сеть одинаковых предохранителей и т. п.).

Разберем более подробно пример с бросанием монеты.

При каждом испытании есть два равновероятных исхода: О (выпал «орел») и Р (выпала «решка»).

Допустим, что монету бросили n раз подряд.

Сколько последовательностей исходов при этом можно получить?

Эта комбинаторная задача фактически уже была решена раньше. Последовательность результатов испытаний можно записать как слово в двухбуквенном алфавите, например ОРРОР... . Число n-буквенных слов в таком алфавите равно 2^n. Таким образом, общее число возможных вариантов при повторном бросании монеты будет равно 2^n.

Какова вероятность того, что при n-кратном бросании монеты все время будет выпадать «орел»?

Ясно, что из всех возможных 2^n вариантов благоприятным является один:

$$\underbrace{O_1O_2...O_3}_{n\text{ раз}}.$$

Искомая вероятность равна $\frac{1}{2^n}$.

Например, при $n = 10$ эта вероятность равна

$$p = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001.$$

Интуитивно ясно, что при неограниченном увеличении числа испытаний вероятность того, что все время будет выпадать «орел», стремится к нулю. Формула $\frac{1}{2^n}$ дает точную оценку интересующей нас вероятности.

Решение. Элементарным событием в этой задаче будет одна строчка длины n из двух символов О и Р.

Число этих событий равно 2^n.

Вероятность появления одного фиксированного события $p = \frac{1}{2^n}$.

Число строк, у которых ровно k раз встречается символ О, равно C_n^k — таким числом способов можно указать (выбрать) те места, где будет стоять символ О.

Таким образом, вероятность того, что при n бросаниях монеты ровно k раз выпадет «орел», будет равна $p_k = \frac{C_n^k}{2^k}$.

Ответ: $p_k = \frac{C_n^k}{2^k}$.

Заметим, что события A_k попарно несовместны, а вместе исчерпывают все возможности.

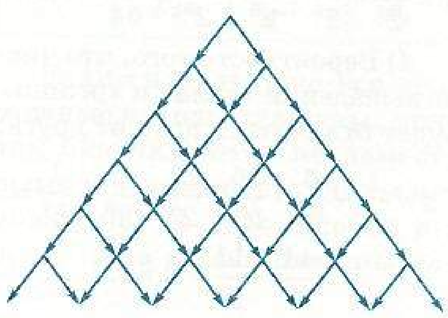
Отсюда вытекает, что сумма вероятностей p_k должна равняться 1.

Это легко проверить, рассмотрев разложение бинома

$$1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n =$$

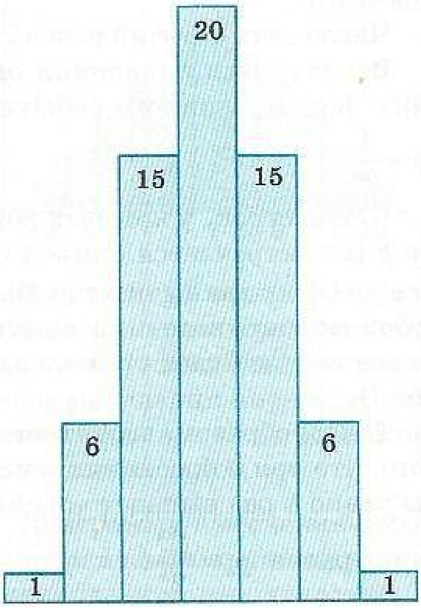
$$= \frac{1}{2^n} + \frac{C_n^1}{2^n} + \ldots \frac{C_n^k}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Треугольник Паскаля



Диаграмма

($n = 6$)



На диаграмме указано количество частиц в каждой корзине через 6 с.

Примеры

Пусть монета брошена 6 раз.

1) Вероятность того, что хоть раз выпал «орел»:

$$p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64} \approx 0{,}984.$$

2) Вероятность того, что «орел» выпадет столько же раз, сколько и «решка»:

$$p = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16} \approx 0{,}31.$$

3) Вероятность того, что «орел» выпадет не менее трех раз:

$$p = \frac{1}{2^6} + \frac{6}{2^6} + \frac{15}{2^6} + \frac{20}{2^6} = \frac{42}{64} \approx 0{,}66.$$

4) Вероятность того, что число выпадений «орла» и «решки» будет отличаться друг от друга:

$$p = \frac{1}{2^6} + \frac{6}{2^6} + \frac{15}{2^6} + \frac{15}{2^6} + \frac{6}{2^6} + \frac{1}{2^6} =$$

$$= \frac{44}{2^6} = \frac{11}{16} \approx 0{,}69.$$

Вероятность того, что при 10 бросаниях монеты ни разу не выпадает «орел», т.е. все время будет выпадать «решка», тоже приблизительно равна 0,001.

Как можно использовать схему повторных испытаний?

1. Прежде всего можно освободиться от того требования, что повторяющееся событие A имеет вероятность $\frac{1}{2}$, как это было при бросании монеты.

Пусть событие A происходит с вероятностью p.

Запишем разложение бинома:

$$(p + (1-p))^n = p^n + np^{n-1}(1-p) + \ldots +$$
$$+ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + \ldots + (1-p)^n.$$

Слагаемое $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ дает вероятность того, что при повторном n-кратном испытании событие A наступит ровно k раз.

2. Вернемся к случаю $p = \frac{1}{2}$.

При $p = \frac{1}{2}$ получаем распределение вероятностей повторного выпадения событий, каждое из которых имеет два равновероятных исхода.

Представим себе частицу, которая каждую секунду раскалывается на две аналогичные частицы, попадающие в две соседние корзины, как это изображено на знаменитом треугольнике Паскаля.

Ясно, что на n-м шаге всего будет 2^n частиц, распределение которых в $(n + 1)$-й корзине при $n = 6$ изображено на диаграмме.

Вероятность попадания в корзины равна:

$$\frac{1}{2^6},\ \frac{6}{2^6},\ \frac{15}{2^6},\ \frac{20}{2^6},\ \frac{15}{2^6},\ \frac{6}{2^6},\ \frac{1}{2^6}.$$

3. С помощью схемы Бернулли можно решать многие задачи на подсчет вероятностей.

Вопросы и упражнения

1. Монету бросают 10 раз. При этом «орел» выпал k раз. При каких k вероятность этого события наименьшая и при каких — наибольшая?
2. Игральная кость бросается подряд 5 раз. С какой вероятностью все время будет выпадать шестерка? ни разу не выпадет шестерка? хотя бы один раз выпадет шестерка?
3. Две игральные кости бросаются одновременно. Выпадение какой суммы очков более вероятно — 2 или 3? 2 или 4?

Занятие 3
Случайная величина

Как соединяется комбинаторика с теорией функций?

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие *случайной величины*.

Классическая вероятность, в основе которой лежат комбинаторные подсчеты числа вариантов, позволяет решить многие практические задачи. Однако возможных исходов может быть бесконечно много, и применить к ним комбинаторные подсчеты нельзя. В этих случаях используется аппарат теории функций, при котором каждому возможному исходу сопоставляется некоторое число, а вероятность исхода определяется как функция с определенными свойствами.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации.

1. *Дискретная случайная величина*. Для использования аппарата теории функций потребуем, чтобы результаты события, его исходы, выражались числами. При бросании игральной кости в качестве исхода получаем число очков, нанесенное на его грань. Для задач комбинаторики это число является просто меткой, которая позволяет различить грани кубика (вместо цифры можно было бы использовать цвет), а для задач теории функций важно само значение числа (величины).

Нагляднее всего это можно себе представить, рассматривая величины, которые при-

Случайной величиной называется такая величина, которая в результате эксперимента может принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какие именно.

Случайные величины бывают:

- дискретные;
- непрерывные.

Пример

Представим себе, что мы проводим эксперимент, результатом которого является одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$, и нам известны вероятности $p_1, \ldots, p_n$ появления этих чисел.

Дискретную случайную величину можно задать таблицей:

a_1	a_2	...	a_n
p_1	p_2	...	p_n

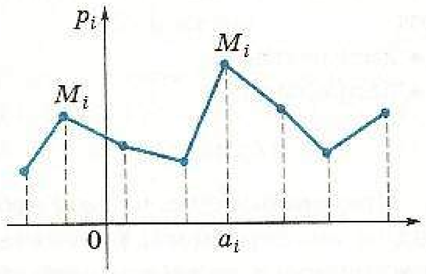
Если считать, что все возможные исходы известны, причем они являются несовместными и значение величины однозначно, то вероятности p_1, p_2, ..., p_n в сумме должны давать 1.

В случае бросания игральной кости с нанесенными шестью цифрами все вероятности p_k равны $\frac{1}{6}$.

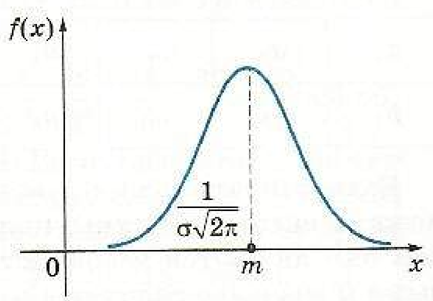
Если бросать одновременно две кости и считать сумму выпавших очков, то эта случайная величина может принимать значения от 2 до 12 с такими вероятностями:

a	2	3	4	5	6	7
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
a	8	9	10	11	12	
p	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

Закон распределения дискретной случайной величины



Плотность нормального распределения случайной величины



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

нимают конечное число различных значений (их можно включить в общий класс так называемых *дискретных величин*). Если занумеровать значения от 1 до n, то можно сказать, что задана функция, определенная на конечном множестве натуральных чисел от 1 до n и принимающая *различные* числовые значения a_1, ..., a_n.

Свяжем с каждым значением случайной величины вероятность его появления. Построим график (несколько отличный от того, который строился в примере бросания двух игральных костей), на горизонтальной оси отложим возможные значения случайной величины a_k, а на вертикальной оси – вероятности появления этих значений $p_k = p(a_k)$. Точки M_k с координатами (a_k, p_k) соединим отрезками. Полученный график представляет собой *закон распределения вероятностей* данной случайной величины. Если дискретная случайная величина представлена в виде таблицы, в которой перечислены ее значения и соответствующие им вероятности, то получим другое представление закона распределения дискретной случайной величины.

2. *Непрерывная случайная величина.* Существуют случайные величины, которые могут принимать любые значения из некоторого промежутка. Такие величины называют *непрерывными*. Например, дальность выстрела из орудия можно считать числом, принимающим любые значения в пределах дальности стрельбы этого орудия. Приписывать вероятность точному значению дальности бессмысленно — надо оперировать с промежутками, интервалами, куда попадает результат испытания. Правильнее задать функцию $y = f(x)$, с помощью которой можно вычислить вероятность попадания значения случайной величины в заданный интервал.

Для непрерывной случайной величины нельзя построить таблицу, в которой могут быть перечислены все ее возможные значения. Поэтому вместо вероятности конкретного значения непрерывной случайной величины X рассматривают вероятность того, что случайная величина X принимает значения, меньшие данного числа x, т.е. рассматривается функция $F(x) = p(X < x)$. Если возможные значения случайной величины заполняют промежуток $[a; b]$ (в общем случае он может быть и бесконечным), то $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, причем функция $F(x)$ возрастает от 0 до 1.

Производная этой функции $f(x)$ характеризует *плотность* распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Она обладает следующими свойствами:

$$f(x) \geq 0,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ \int_a^b f(x)dx = 1.$$

Функция $F(x)$ называется *интегральной функцией распределения*, или *интегральным законом распределения случайной величины*.

Какие числовые характеристики можно связать со случайной величиной?

Математическое ожидание случайной величины.

Это понятие является аналогом среднего арифметического. Если случайная величина принимает значения $a_1, \ldots, a_n$ с одинаковой вероятностью $\frac{1}{n}$, то ее математическое ожидание M и будет средним арифметическим:

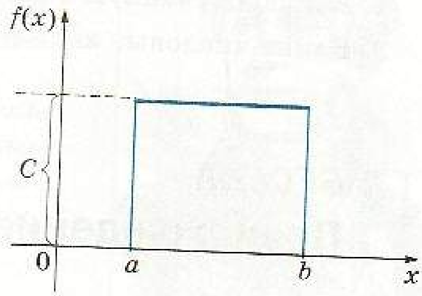
$$\boxed{M = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}.$$

Если нам известны вероятности $p_1, \ldots, p_n$ принимаемых значений, то в качестве математического ожидания берется взвешенное среднее арифметическое:

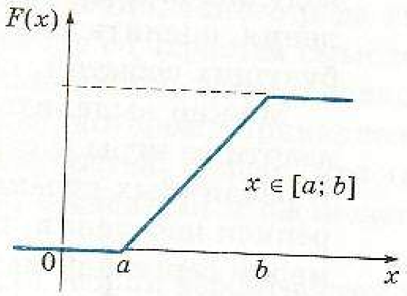
$$\boxed{M = p_1a_1 + \ldots + p_na_n.}$$

Кроме математического ожидания, вводят и другие числовые характеристики случайной величины, например дисперсию (математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания); среднее квадратичное отклонение (показывает разброс значений случайной величины вокруг ее математического ожидания) и др.

Плотность равномерно распределенной случайной величины



Равномерное распределение случайной величины (интегральная функция распределения)



$$f(x) = F'(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$[a; b]$ — область значений случайной величины

Пример

Вычислим математическое ожидание суммы очков при бросании двух игральных костей.

$$M = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{37}\cdot 3 + \frac{3}{36}\cdot 4 + \ldots + \frac{2}{36}\cdot 11 + \frac{1}{36}\cdot 12 = 7.$$

Заметим, что математическое ожидание числа очков при бросании одной кости будет равно $M = \frac{1 + 2 + \ldots + 6}{6} = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2}$.

Видим, что математическое ожидание суммы очков при бросании двух костей оказалось вдвое бо́льшим.

Этот результат нетрудно обобщить для любого числа независимых испытаний.

Вопросы и упражнения

1. Какую случайную величину называют дискретной (непрерывной)?
2. Какие числовые характеристики случайной величины вам известны?

БЕСЕДА

Происхождение теории вероятностей

Историческая справка

Существует версия, что теория вероятностей как раздел математики возникла в 1654 г. из переписки между Б. Паскалем и П. Ферма по поводу одной задачи. Попытки с помощью чисел описать случайные явления, оценить шансы их появления, измерить возможные результаты будущих событий, конечно, предпринимались гораздо раньше.

Можно выделить два главных источника теории вероятностей — азартные игры и статистическая обработка результатов наблюдений. В различных странах в разные эпохи предпринимались попытки переписи населения, регистрировались рождения и смерти людей. Примером серьезной математической обработки такого рода данных могут служить опубликованные в начале XVII в. в Англии таблицы продолжительности жизни, основанные на анализе 57 годовых отчетов о смертности в Лондоне. Например, в этих публикациях была представлена следующая таблица:

Возраст, лет	0	6	16	26	36	46	56	66	76
Число людей, доживающих до этого возраста, %	100	64	40	25	16	10	6	3	1

Из такого рода анализа делались выводы о средней продолжительности жизни, о различиях между группами населения и т. п. Английские таблицы вызвали большой интерес в научном мире. Так, знаменитый голландский физик и математик Л. Гюйгенс в письме своему брату (1669 г.) писал, что на основании этих таблиц он подсчитал,

Христиан Гюйгенс
(1629 — 1695)

Нидерландский механик, физик и математик, создатель волновой теории света.

В 22 года опубликовал работу об определении длины дуги окружности, эллипса и гиперболы.

Автор одного из первых трактатов по теории вероятностей (1657 г.).

Пьер Симон Лаплас
(1749 — 1827)

Французский астроном, математик, физик.

Научное наследие Лапласа относится к области небесной механики, математики и математической физики.

Для разработки созданной им математической теории вероятностей Лаплас ввел так называемые производящие функции и применял преобразование, которое носит его имя (преобразование Лапласа).

что проживет до 55 лет, а его брат до 56,5. Конечно, такого рода «математические выводы» вступали в противоречие со здравым смыслом, это еще не могло быть частью математической науки, однако недаром чуть позже французский математик П. Лаплас, которому принадлежат фундаментальные результаты в теории вероятностей, сказал, что «эта наука есть не что иное, как здравый смысл, сведенный к вычислениям».

Необходимо отметить еще один важный для теории вероятностей источник статистических данных — отчеты страховых компаний по защите интересов купцов, особенно в связи с частыми кораблекрушениями. Знаменитая на весь мир лондонская морская Контора Ллойд (открытая во второй половине XVII в.) надежно гарантировала выплату страховки, и эти гарантии, конечно, должны были быть основаны на достаточно точных закономерностях.

Два главных источника теории вероятностей

- Азартные игры;
- статистическая обработка результатов наблюдений.

Обратимся к азартным играм. Слово «*азарт*» происходит от арабского слова «*аль-заар*», обозначающее игральную кость. Азартные игры используют, конечно, не только кости, т. е. обточенные фигурки различной формы с нанесенными на их грани метками, но и многие другие «орудия» — карты, расчерченные доски с фигурами и т. п.

До настоящего времени примеры из области азартных игр широко используются при изучении теории вероятностей как упрощенные модели случайных явлений, иллюстрирующие в простом виде основные законы и правила теории вероятностей.

ГЛАВА 12
Уравнения и неравенства

Занятие 1
Равносильность уравнений

Решение уравнений

Неизвестные в уравнениях обычно обозначают последними буквами латинского алфавита: x, y, z.

Примеры

Решить следующие уравнения:

1) $x^2 - 1 = x$ — уравнение с одним неизвестным;

2) $x^2 + y^2 = x + y$ — уравнение с двумя неизвестными;

3) $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$; ОДЗ: $\mathbf{R}$;

4) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{2}{3}$; ОДЗ: $x \neq \pm 1$;

5) $\sqrt{1-x} = \lg x$; ОДЗ: $(0; 1]$, или $0 < x \leq 1$.

Решение:

- $x = 1$ является решением (корнем, одним из решений) уравнений 3 и 5, не является решением уравнения 1) и не входит в ОДЗ уравнения 4).
- $x = 1$, $y = 1$ (или $(1; 1)$) — одно из решений уравнения 2.
- $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — решения уравнения 1);

Что следует уточнить, принимаясь за решение уравнений?

При решении уравнений используются следующие термины:

- *неизвестное* — буква для обозначения какой-либо неизвестной величины;
- *уравнение* — два выражения с неизвестными, соединенные знаком равенства;
- *область допустимых значений* (ОДЗ) *уравнения* — множество значений, которые могут принимать неизвестные, входящие в уравнение;
- *решение уравнения* — набор значений неизвестных (из ОДЗ), при подстановке которых уравнение превращается в верное числовое равенство;
- *решить уравнение* (найти корни уравнения) — найти, описать все решения уравнения. Может оказаться, что уравнение решений не имеет, т. е. множество его решений пусто.

Как использовать математический язык при решении уравнений?

1. *Язык теории множеств*. Уравнение будем обозначать буквой E (от Equation); множество решений уравнения E — $R(E) = R$ (от Root); область допустимых значений (ОДЗ) уравнения E — $D(E) = D$ (от Domain). По определению $R(E) \subset D(E)$ — корни уравнения должны входить в его ОДЗ.

1) Если уравнение E не имеет решений, то $R(E) = \varnothing$ — пустое множество.

2) Если уравнение E имеет единственное решение, то множество $R(E)$ состоит из одного элемента (одного числа, если в уравнении одно числовое неизвестное).

3) Уравнение E_2 является *следствием* уравнения E_1, если $R(E_2) \supset R(E_1)$, т.е. каждое решение уравнения E_1 является решением уравнения E_2.

4) Уравнение E_2 равносильно уравнению E_1, если $R(E_2) = R(E_1)$, т.е. множества решений E_1 и E_2 совпадают.

Равенство $R(E_1) = R(E_2)$ эквивалентно двум включениям $R(E_1) \subset R(E_2)$ и $R(E_2) \subset R(E_1)$. Это дает возможность переформулировать определение равносильности.

Уравнения E_1 и E_2 *равносильны*, если каждое решение уравнения E_1 является решением уравнения E_2 и каждое решение уравнения E_2 является решением уравнения E_1.

5) Если уравнение E_3 является следствием уравнения E_2, а уравнение E_2 — следствием уравнения E_1, то уравнение E_3 является следствием уравнения E_1.

При этом:

$$R(E_1) \subset R(E_2) \subset R(E_3).$$

Аналогичное утверждение верно и для понятия равносильности уравнений.

6) Обычный путь решения уравнения состоит в построении такой цепочки следствий, последнее уравнение которой мы решать умеем. После этого либо выполняют проверку, либо выясняют, нельзя ли сделать «обратный ход» в построенной цепочке, т.е. будут ли уравнения цепочки равносильны друг другу.

Если при переходе от уравнения E_1 к уравнению E_2 оказалось, что множество $R(E_2)$ больше множества $R(E_1)$, т.е. $R(E_1) \subset R(E_2)$, то говорят, что появились «посторонние корни», которые надо отсеять.

Если не все элементы множества $R(E_1)$ вошли в $R(E_2)$, то говорят, что произошла «потеря корней». Разумеется, в этом случае уравнение E_2 не является следствием уравнения E_1.

2. *Язык логики.* Уравнение можно рассматривать как переменное высказывание, множество решений которого — «множество

Язык теории множеств

- E — уравнение;
- $R\,(E)$ — множество решений уравнения;
- $D\,(E)$ — область допустимых значений.

Если в уравнение E входит одно неизвестное, значениями которого являются действительные числа, то множество его корней $R(E)$ является подмножеством $\mathbf{R}$.

Общепринятая запись множества перечислением его элементов в фигурных скобках часто оказывается громоздкой, и можно использовать любую другую форму записи, лишь бы она была точной и понятной.

Нарушение равносильности

Примеры

1. $x+\dfrac{1}{x}+2\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)=0$, $x + 2x = 0$.

2. $\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$, $x + 1 = 2$.

3. $2x + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{x-3} + x + 3$, $2x = x + 3$.

4. $2x + 1 = x$; $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$.

5. $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$, $x^2 - 2 = x$.

В примерах 1 — 5 второе уравнение является следствием первого, но имеет «посторонний корень», появившийся за счет расширения ОДЗ.

6. $x - 1 = 2x + 3$, $x^2 - 1 = (x + 1)(2x + 3)$.

7. $x - 2 = 1 - 2x$, $(x - 2)^2 = (1 - 2x)^2$.

8. $x^2 - 1 = (x - 1)(2x + 1)$, $x + 1 = 2x + 1$.

9. $x^2 = (2x - 1)^2$, $x = 2x - 1$.

В примерах 6 и 7 появляется «посторонний корень», в примерах 8 и 9 происходит «потеря корня».

Язык логики

- переменное высказывание — уравнение;
- «множество истинности» этого высказывания — множество решений уравнения.

$E_1 \Rightarrow E_2$, т.е. $R(E_1) \subset R(E_2)$, — импликация;

$E_1 \Leftrightarrow E_2$, т.е. $R(E_1) = R(E_2)$, — эквивалентность.

Системы и совокупности уравнений

Каждое уравнение системы можно рассматривать как уравнение некоторой линии на координатной плоскости.

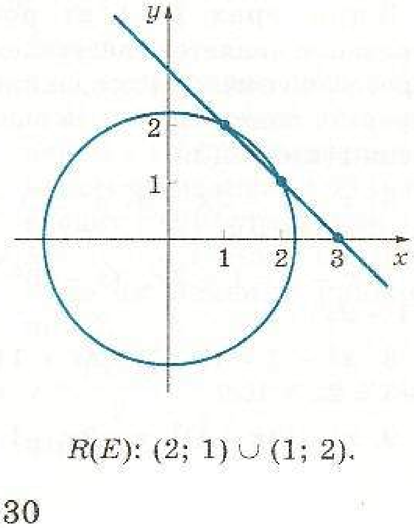
Координаты каждой точки этой линии — одно решение уравнения.

Решения системы — координаты точек пересечения графиков уравнений.

Совокупность уравнений

Пример

$$E = \begin{cases} x + y = 3; \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$



$R(E)$: $(2; 1) \cup (1; 2)$.

истинности» этого высказывания, т.е. множество тех значений неизвестных (переменных для данного высказывания), при подстановке которых получается утверждение (равенство чисел).

Следствия можно записывать с помощью логического знака *следствия* (*импликации*):

$$E_1 \Rightarrow E_2 \text{ означает, что } R(E_1) \subset R(E_2).$$

Равносильность уравнений записывается с помощью знака *эквивалентности* (*равносильности*):

$$E_1 \Leftrightarrow E_2 \text{ означает, что } R(E_1) = R(E_2).$$

Равносильность эквивалентна наличию двух следствий:

$$E_1 \Leftrightarrow E_2 \text{ означает, что } E_1 \Rightarrow E_2 \text{ и } E_2 \Rightarrow E_1.$$

3. *Системы и совокупности уравнений. Система уравнений* — это набор нескольких уравнений вместе с задачей нахождения решений, которые удовлетворяют каждому из уравнений.

Обозначение: $E = \begin{cases} E_1, \\ E_2. \end{cases}$

Решение системы E — множество всех общих решений уравнений E_1 и E_2, т.е.

$$R(E) = R(E_1) \cap R(E_2).$$

Совокупность уравнений — набор нескольких уравнений вместе с задачей нахождения решений, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений.

Обозначение: $E = \left[\begin{array}{l} E_1, \\ E_2. \end{array}\right.$

Решение совокупности E — это объединение решений уравнений, входящих в эту совокупность:

$$R(E) = R(E_1) \cup R(E_2).$$

Совокупность уравнений часто появляется при необходимости разбить ОДЗ уравнения на более мелкие части: если $D(E) = D_1 \cup D_2$, то уравнение E равносильно совокупности уравнений, запись которых совпадает с записью уравнения E, но которые имеют областями допустимых значений множества D_1 и D_2.

Вопросы и упражнения

1. Что означает решить уравнение?
2. Можно ли утверждать, что уравнение решено, если определено, что у него нет корней?
3. Что означает, что одно уравнение является следствием другого?
4. Какие уравнения называются равносильными?
5. Какая разница между системой уравнений и совокупностью уравнений?
6. Числа $x = 1$, $y = 1$ удовлетворяют системе $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 0. \end{cases}$ Сколько решений представляет эта запись — одно или два?
7. Что может произойти, если переписать уравнение, изменив его область допустимых значений?

Занятие 2
Основные приемы решения уравнений

Какие формулы полезно помнить при решении простейших уравнений?

Линейное уравнение $ax = b$	$x = \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$
Уравнение с модулем $\lvert x - a\rvert = b$	$x_1 = a - b$; $x_2 = a + b$, $b > 0$
Степенное уравнение $x^n = a$	$x_1 = \sqrt[n]{a}$, n — нечетно $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$, n — четно и $a \geq 0$
Квадратное уравнение: • $x^2 + px + q = 0$ • $ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$, $p^2 - 4q \geq 0$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$
Иррациональное уравнение $\sqrt{x} = b$	$x = b^2$, $b \geq 0$, $\varnothing$ при $b < 0$
Показательное уравнение: • $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ • $a^x = a^c$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$x = \log_a b$, $b > 0$, $\varnothing$ при $b \leq 0$ $x = c$
Логарифмическое уравнение $\log_a x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$x = a^b$
Тригонометрическое уравнение: • $\sin x = a$ $(\lvert a\rvert \leq 1)$ • $\cos x = b$ $(\lvert b\rvert \leq 1)$ • $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = b$	$x = (-1)^n \arcsin a \pm n\pi$, $x = \pm\arccos b + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ $x = \mathrm{arctg}\, a + n\pi$, $x = \mathrm{arcctg}\, b + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$

Выделение линейного множителя

- $f(x) = x^3 + 6x - 7$.

Легко заметить, что $f(1) = 0$. Следовательно, $f(x)$ делится на $x - 1$. Второй множитель можно найти либо делением «столбиком», либо «заставляя» $f(x)$ разделиться на $x - 1$:

$$x^3 + 6x - 7 = x^3 - x^2 + x^2 - x + 7x - 7 = (x - 1)(x^2 + x + 7).$$

Разложение многочлена на множители способом группировки

- $x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$;
- $x^6 + 4x^4 - 32x^2 = x^2(x^4 + 4x^2 + 4 - 36) = x^2((x^2 + 2)^2 - 6^2) = x^2(x^2 + 8)(x - 2)(x + 2)$.

Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Выполняем преобразования:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1).$$

Теперь решаем два стандартных уравнения:

$$\sin 2x = 0,\ x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos x = -\frac{1}{2},\ x = \pm\frac{2\pi k}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};$$

- $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\cos 2x \sin x$.

Преобразуем левую часть:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \times (\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

Возвращаемся к исходному уравнению: $-\cos 2x = 2\cos 2x \sin x$.

Как сводить уравнения к простейшим?

1. *Разложение на множители.*

Если уравнение равносильными преобразованиями удается привести к виду $\square \cdot \bigcirc = 0$, то оно равносильно $\left[\begin{array}{l}\bigcirc = 0\\ \square = 0\end{array}\right.$ при условии сохранения ОДЗ.

1) *Выделение множителя в алгебраическом выражении.*

Разложение многочлена на множители основано на следующей простой теореме (ее часто называют теоремой Декарта, иначе ее можно получить как следствие известной теоремы Безу): *если число a является корнем многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на двучлен $x - a$, т.е. справедливо разложение на множители: $f(x) = (x - a)g(x)$, где $g(x)$ — многочлен, степень которого на единицу меньше степени $f(x)$.*

Корень многочлена с целыми коэффициентами можно попытаться найти подбором.

Нетрудно доказать, что целый корень многочлена с целыми коэффициентами и с коэффициентом, равным 1, при старшей степени обязательно является делителем свободного члена.

Поэтому, перебирая делители свободного члена, можно узнать все целые корни.

2) *Способ группировки.*

Часто для выделения множителя некоторого выражения полезно рационально сгруппировать его слагаемые.

Этот прием широко используется при решении алгебраических уравнений.

В ходе решения тригонометрических уравнений часто удается выделить множители и тем самым упростить уравнение.

При переходе от уравнения вида $\square \cdot \bigcirc = 0$ к совокупности двух уравнений вида $\square = 0$ и $\bigcirc = 0$ надо следить за тем, попадают ли корни одного из них в ОДЗ другого (и тем самым в ОДЗ исходного уравнения).

3) *Сокращение общего множителя.*

Уравнение вида $\square \cdot \blacksquare = \bigcirc \cdot \blacksquare$ можно преобразовать к виду $(\square - \bigcirc) \cdot \blacksquare = 0$, но можно и сократить на ■, решив предварительно уравнение ■ = 0 и указав его корни в окончательном ответе (не забыв проверить, что они лежат в ОДЗ уравнения □ = ○).

2. *Замена неизвестного.*

Замена неизвестного — самый распространенный способ решения уравнений.

Он состоит в следующем. Анализируя внешний вид уравнения, стараются заметить его симметрию — часто можно увидеть, что сложное выражение зависит лишь от некоторого блока — повторяющегося выражения.

Посмотрите, не решая, на следующий набор уравнений:

а) $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-120=0$;

б) $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+3x+1}=1$;

в) $2^{x^2+3x}-2^{x^2+3x-1}=\frac{1}{2}$;

г) $\log_2^2(x^2+3x)-\log_2(x^2+3x)=2$.

В каждом из этих уравнений отметим присутствие выражения x^2+3x.

Если заменить его буквой y, т.е. положить $y=x^2+3x$, то получим более простые уравнения относительно y:

а) $y^2+2y-120=0$;

б) $\sqrt{y}+\sqrt{y+1}=1$;

в) $2^y-2^{y-1}=\frac{1}{2}$;

г) $\log_2^2 y-\log_2 y=2$.

Найдя из этих уравнений значения y, подставим их в соотношение $y=x^2+3x$ и вычислим корни исходного уравнения.

Некоторые замены встречаются наиболее часто.

1) Биквадратное уравнение

$$x^4+px^2+q=0$$

заменой $x^2=y$ приводится к квадратному

$$y^2+py+q=0.$$

Ответ: 1; 4; $\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

2) Возвратное уравнение

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0.$$

Приравниваем множитель $\cos 2x$ нулю и сокращаем на него:

$$\cos 2x=0,\ x=\frac{(2k+1)\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z};$$

$$\sin x=-\frac{1}{2},\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

$$x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x=\frac{7}{6}\pi+$ $+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Изменение ОДЗ при разложении на множители

- $x\sqrt{x-3}-2=2x-\sqrt{x-3}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\sqrt{x-3}+\sqrt{x-3}-2x-2=$ $=0\Leftrightarrow(x+1)\sqrt{x-3}-2(x+1)=$ $=0\Leftrightarrow(x+1)(\sqrt{x-3}-2)=0.$

Корень первого множителя $x+1$ не попадает в ОДЗ второго, поэтому его нужно отбросить. Приравняв нулю второй множитель, получим корень $x=7$.

Ответ: 7;

- $\frac{\sin x+\sin 2x}{2-\cos x}=\frac{1}{2}\sin x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{\sin x+2\sin x\cos x}{2-\cos x}=$ $=\frac{1}{2}\sin x\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

Приравниваем $\sin x$ к нулю и сокращаем на него: $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Некоторые из найденных корней не попадают в ОДЗ оставшегося уравнения, в которое входит $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (например, $\sin\pi=$ $=0$, но $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует). Оставить надо лишь $x=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, и после этого решать оставшееся уравнение:

$$\frac{1+2\cos x}{2-\cos x}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Выполняем замену $\cos x=$ $=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, где $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (при этой замене могут потеряться корни, если они являются корнями уравнения $\cos x = -1$, однако этого не происходит). После преобразований получим алгебраическое уравнение $3t^3 + 2t^2 + t - 6 = 0$. Один корень $t = 1$ угадывается сразу. Раскладываем на множители: $3t^3 + 2t^2 + t - 6 = (t - 1)(3t^2 + 5t + 6)$. Второй множитель корней не имеет. Получаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Замена неизвестного

- $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{2-x} = 135$.

После замены $2^x = y$ получим $15 \cdot 2y + 15 \cdot \frac{4}{y} = 135 \Leftrightarrow 2y + \frac{4}{y} = 9 \Leftrightarrow\ 2y^2 - 9y + 4 = 0$; $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому либо $2^x = 4$; $x_1 = 2$, либо $2^x = \frac{1}{2}$; $x_2 = -1$.

Ответ: -1; 2;

- $x^{\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\lg x} = \sqrt{x}$.

Логарифмируем и заменяем $\lg x$ на y:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\lg x\right)\lg x = \frac{1}{2}\lg x.$$

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}y\right)y = \frac{1}{2}y\ ;$$

$$y = 0 : \lg x = 0,\ x = 1;$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{5}y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2 : \lg x = 2,$$

$$x = 100.$$

Ответ: 1; 100;

- уравнение может быть однородным не только по отношению к тригонометрическим функциям:

$$(x - 2)^4 + (x - 2)^2(x + 3)^2 - 20(x + 3)^4 = 0.$$

Делим на x^2 (0 не является корнем) и выполняем замену $x + \frac{1}{x} = y$. Заметим, что $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, так что $x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2.$

3) Однородное уравнение

$$\sin^2 x + p\sin x\cos x + q\cos^2 x = 0.$$

Делим на $\cos^2 x$ и заменяем $\operatorname{tg} x$ на y. Заметим, что ни один корень уравнения $\cos x = 0$ не является корнем исходного уравнения. Получаем $y^2 + py + q = 0$.

4) *Замены в показательных уравнениях.* Показательные уравнения обычно приводят заменой неизвестного к линейному или квадратному уравнению.

Различить эти случаи можно, сравнивая показатель при одном и том же основании.

Например, все выражения в таком ряду: 2^{x+1}; $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$; $(\sqrt{2})^{2x+3}$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-2x}$; $(0{,}25)^{-\frac{1}{2}x}$; $8^{\frac{1+x}{3}}$ линейно выражаются через $y = 2^x$:

$$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2y;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 2^{x-2} = \frac{1}{4}y;$$

$$(\sqrt{2})^{2x+3} = 2^{x+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}y;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-2x} = 2^{-\frac{1}{2}(1-2x)} = 2^{x-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}};$$

$$(0{,}25)^{-\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2^x = y;$$

$$8^{\frac{1+x}{3}} = 2^{x+1} = 2y.$$

Замечание об области определения нового неизвестного. Обозначая в некотором уравнении с неизвестным x выражение $f(x)$ за новое неизвестное y, приходим к уравнению с неизвестным y.

Область определения y совпадает с областью значений функции $y = f(x)$.

На это можно не обращать никакого внимания при замене неизвестного, так как, решив уравнение относительно y и перейдя к уравнению $f(x) = y$ для нахождения x, мы все равно столкнемся с этим вопросом — уравнение $f(x) = y$ имеет корни в том и только в том случае, когда число y входит в область значений функции f.

Например, выполняя в некотором показательном уравнении замену $2^x = y$, можно на этом этапе не учитывать, какие значения может принимать y.

Если уравнение относительно y имеет, например, корни $y_1 = 4$, $y_2 = -4$, то, решая уравнение $2^x = -4$, мы запишем, что у него нет корней.

В то же время отмечать (если это не сложно) область значений y полезно, так как это, во-первых, может упростить решение уравнения относительно y (в нашем примере, если искать только положительные решения, то это может оказаться проще, чем решать уравнение полностью).

Во-вторых, внимание к области значений может предостеречь от случайных ошибок.

Например, выполняя в возвратном уравнении замену $y = x + \frac{1}{x}$, полезно сразу иметь в виду, что $|y| \geq 2$.

Поэтому, получив корень $y = \frac{7}{4}$, его можно отбросить сразу и не решать уравнения $x + \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$, чтобы не ошибиться при решении квадратного уравнения.

Делим на $(x + 3)^4$ ($x = -3$ не является корнем): $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^4 + \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 - 20 = 0$. После замены $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 = y$ получаем $y^2 + y - 20 = 0$; $y_1 = 4$, $y_2 = -5$.

$$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} = \pm 2;$$

$$\frac{x-2}{x+3} = 2 \Leftrightarrow x_1 = -8;$$

$$\frac{x-2}{x+3} = -2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{4}{3};$$

$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 = -5$ — решений нет.

Ответ: -8; $-\frac{4}{3}$;

- уравнение со взаимно-обратными выражениями:

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} = 3.$$

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = y; \quad \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{y}.$$

$$y + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0;$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = 2.$$

$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow x = x + 1$ — решений нет.

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 4(x+1) \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

? Вопросы и упражнения

1. Что может произойти с ОДЗ при переходе от уравнения вида $\square \cdot \bigcirc = 0$ к совокупности уравнений $\square = 0$, $\bigcirc = 0$?
2. Какие рациональные корни могут быть у многочлена с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1?
3. Может ли произойти потеря корней при переходе от уравнения вида $\square \cdot \bigcirc = 0$ к совокупности уравнений $\square = 0$, $\bigcirc = 0$? Могут ли при этом появиться посторонние корни?

4. Какие связи возможны между уравнениями □·○ = □·■ и ○ = ■, полученными из исходного сокращением на выражение □?
5. Какие замены неизвестного встречаются наиболее часто?
6. В уравнении вида $F(f(x)) = 0$ сделана замена $f(x) = y$ и получено уравнение вида $F(y) = 0$. Какова его область допустимых значений?
7. Приведите примеры показательных уравнений заменой неизвестного, приводящихся к линейному уравнению; к квадратному уравнению; к алгебраическому уравнению более высокой степени.
8. Из-за чего может произойти потеря корней при решении однородного уравнения? Приведите пример.

Занятие 3
Системы уравнений

Метод подстановки

Рассмотрим четыре системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y = 4xy, \\ x + y = \dfrac{3}{2}xy. \end{cases}$

Второе уравнение в системах можно решить относительно y, т. е. преобразовать к виду $y = f(x)$:

1) $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$;

2) $x^2 + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x^2$;

3) $xy = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{x}$;

4) $x + y = \dfrac{3}{2}xy \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{\dfrac{3}{2}x - 1}$.

Подставляя $y = f(x)$ в первое уравнение систем, получим уравнение с одним неизвестным:

1) $x^2 + (x - 1)^2 = 25$;

2) $x^2 + (3 - x^2)^2 = 5$;

Каковы основные методы решения систем уравнений?

1. *Метод подстановки.*

Системы уравнений появляются при решении задач, в которых неизвестной является не одна величина, а несколько. Эти величины связаны определенными зависимостями, которые записываются в виде уравнений.

Один из основных методов решения систем — метод подстановки.

Рассмотрим, например, систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y, \\ (2 - y) + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Часто удается одно уравнение преобразовать так, чтобы одно неизвестное явно выражалось как функция другого. Тогда, подставляя его во второе уравнение, получим уравнение с одним неизвестным.

Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - y - 2z = -2, \\ 3x + 4y - 5z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y - z, \\ 2(4 - y - z) - y - 2z = -2, \\ 3(4 - y - z) + 4y - 5z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y - z, \\ y = 8z - 6, \\ 3(8z-6) + 4z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y - z, \\ y = 8z - 6, \\ 28z = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

2. *Использование графика.*

Каждое из уравнений системы можно рассматривать как уравнение кривой. Поэтому решения системы двух уравнений с двумя неизвестными можно интерпретировать как координаты точек пересечения двух кривых.

3. *Линейные системы.*

В математике и ее приложениях большую роль играют системы линейных уравнений. Любую такую систему можно решить способом подстановки. Выражая из одного уравнения системы одно неизвестное и подставляя в другие уравнения системы, мы уменьшим число уравнений и неизвестных системы, сохраняя ее линейность.

4. *Симметричные системы.*

Система уравнений называется симметричной, если она составлена из выражений, симметричных относительно неизвестных:

1) $x^2 + y^2$;

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

3) $(x - y)^2$;

4) $x^3 + y^3$;

5) $\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}$;

6) $x + y + z$;

7) $xy + yz + zx$;

8) xyz и т. д.

Возьмем две буквы x и y.

Два выражения — их сумма $u = x + y$ и произведение $v = xy$ — являются основными симметричными выражениями относительно x и y.

Другие симметричные выражения можно выразить через u и v:

1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{u}{v}$;

3) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = u(u^2 - 3v)$.

Теорема Виета выражает основные симметричные выражения относительно корней x_1

3) $\frac{1}{x} + x = 2$;

4) $2x + \frac{3x}{\frac{3}{2}x - 1} = 4x\frac{x}{\frac{3}{2}x - 1}$.

Решая уравнение, находим его корни — значения неизвестного x, а затем для каждого из них — соответствующее значение y по формуле $y = f(x)$:

1) $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -1; \end{cases}$

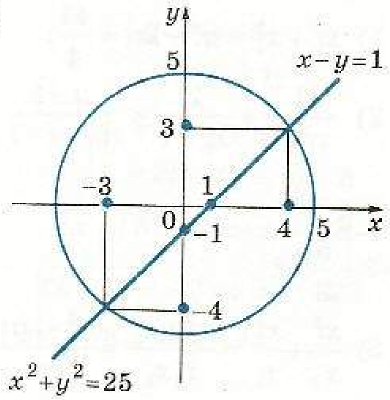
3) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$

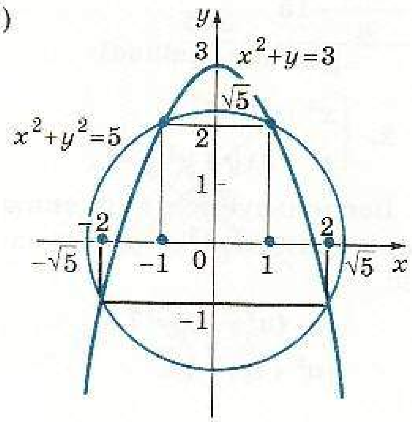
Геометрическая интерпретация

Дадим геометрическую интерпретацию четырех рассмотренных систем.

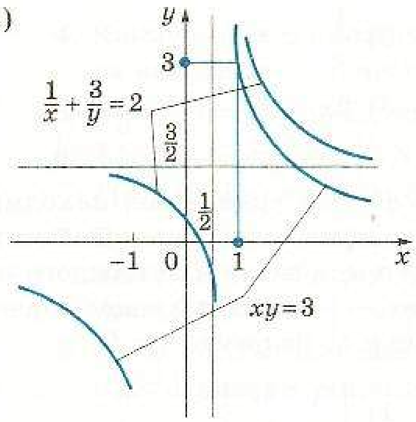
1)



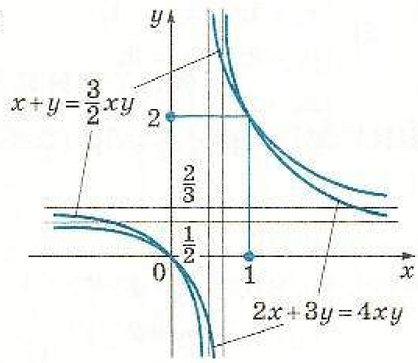
2)



3)



4)



Примеры

1. $2x^2 + 5x - 4 = 0$:
$u = x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$, $v = x_1x_2 = -2$.

1) $x_1^2 + x_2^2 = u^2 - 2v = \frac{41}{4}$;

2) $\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} = \frac{u-2}{v-u+1} = \frac{-\frac{5}{2}-2}{-2+\frac{5}{2}+1} = -3$;

3) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2} = \frac{u^3-3uv}{v} = \frac{-\frac{125}{8}-15}{-2} = \frac{245}{16}$.

2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2 + 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$

Воспользуемся найденным выражением $x^3 + y^3$ через u и v:

$$\begin{cases} u\ \ (u^2 - 3v) = 7, \\ u^2 + v = -1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

и x_2 квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ через коэффициенты:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q. \end{cases}$$

Любое выражение, симметричное относительно корней квадратного уравнения, можно выразить через его коэффициенты, не находя самих корней (см. примеры в узкой колонке).

Можно сформулировать теорему, обратную теореме Виета: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q, \end{cases}$ то они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство этой теоремы получается подстановкой $x_2 = -p - x_1$ из первого уравнения системы во второе.

Симметричную систему можно упростить заменой симметричных выражений выражениями через сумму и произведение неизвестных.

Например, систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7 \end{cases}$ заменой $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ можно привести к системе $\begin{cases} u^2 - 2v = 25, \\ u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7, \\ v = 12. \end{cases}$

Зная u и v, по теореме, обратной к теореме Виета, находим x и y из квадратного уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$: $t_1 = 3$, $t_2 = 4$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

Решение некоторых уравнений полезно сводить к решению симметричных систем.

Например, при решении линейной системы часто можно воспользоваться ее симметрией:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11, \\ 2x + 3y + 4z + t = 12, \\ 3x + 4y + z + 2t = 13, \\ 4x + y + 2z + 3t = 14. \end{cases}$$

Сложим все уравнения и получим $10x + 10y + 10z + 10t = 50$, или $x + y + z + t = 5$.

Теперь вычтем это уравнение из первых трех уравнений:

$$\begin{cases} y+2z+3t=6, \\ y+2z-t=2, \\ y-2z-t=-2. \end{cases}$$

Разность первой пары уравнений дает

$$4t = 4 \Leftrightarrow t = 1;$$

второго и третьего уравнений:

$$4z = 4 \Leftrightarrow z = 1.$$

Далее подстановкой находим $y = 1$ и $x = 2$.

Ответ: $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-1)(4u^2+4u+7)=0, \\ v=-1-u^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-1=0, \\ 4u^2+4u+7=0 \text{ — корней нет;} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow u = 1.$$

Далее решаем систему

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-1. \end{cases}$

3. $\sqrt[3]{x+15} - \sqrt[3]{x-4} = 1.$

Заменяем $\sqrt[3]{x+15}=z;$

$$\sqrt[3]{x-4} = t.$$

$$\begin{cases} z-t=1, \\ z^3-t^3=19, \end{cases}$$

$$z^3 - t^3 = (z-t)(z^2+zt+t^2) = 19.$$

Если $z - t = 1$, то $z^2 + zt + t^2 =$ $= 19.$

Решаем симметричную (относительно z и $-t$) систему:

$$\begin{cases} z+(-t)=1, \\ (z-t)^2-3z(-t)=19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(-t)=-6, \\ z+(-t)=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1=3, \\ t_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} z_2=-2, \\ t_2=-3; \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{x+15} = 3 \Leftrightarrow x = 12;$$

$$\sqrt[3]{x+15} = -2 \Leftrightarrow x = -23.$$

Ответ: –23; 12.

Что можно сказать об исследовании системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде?

Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет наглядный геометрический смысл.

Пусть дана система двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1; \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

График первого уравнения — прямая l_1.

График второго уравнения — прямая l_2.

Решением системы будет точка пересечения графиков с координатами $A(x_0; y_0)$.

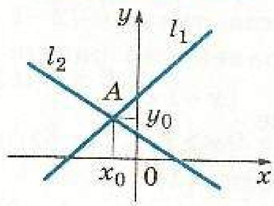
Исключениями являются следующие случаи:

- $l_1 = l_2$, т.е. графики первого и второго уравнений совпадают.

Это возможно в случае пропорциональности коэффициентов при неизвестных (a_1, a_2, b_1 и b_2) и свободных членов (c_1 и c_2), т.е.

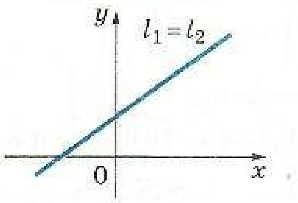
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2};$$

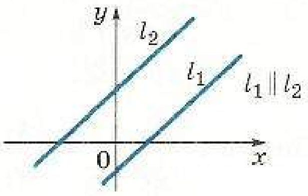
Главный случай



$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Исключения





- $l_1 \parallel l_2$, т.е. графики первого (прямая l_1) и второго (прямая l_2) уравнений параллельны.

Это возможно в том случае, когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены — не пропорциональны, т.е. выполняются следующие соотношения:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

? Вопросы и упражнения

1. Какова геометрическая интерпретация решений системы двух уравнений с двумя неизвестными?
2. При каком условии система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение?
3. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными иметь ровно два решения?
4. В чем состоит теорема, обратная теореме Виета?
5. Как выражается сумма квадратов и сумма кубов чисел через их сумму и произведение?
6. Приведите пример уравнения, решение которого полезно сводить к решению симметричной системы.

Занятие 4
Решение неравенств

Стандартные неравенства

$$\sqrt{x-1} < 2.$$

ОДЗ: $x \geq 1$, или $[1; +\infty)$.

$x = 2$ — одно из решений неравенства, так как $\sqrt{2-1} < 2$.

Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x-1 < 2^2, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Ответ: [1; 5).

Неравенство $x - 1 < 2^2$ является следствием исходного, но не равносильно ему.

Что следует вспомнить перед решением неравенств?

1. *Что значит решить неравенство*?

Неравенство с одним неизвестным получается, когда соединяют знаком неравенства два выражения, содержащих одну букву (одно неизвестное), или, что близко по смыслу, две функции от одной и той же переменной.

Ограничимся неравенствами с одним неизвестным.

Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства — множество значений неизвестного, при подстановке которых получается осмысленное числовое неравенство.

Решение неравенства — это такое значение неизвестного, при подстановке которого получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти, описать множество его решений.

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Одно неравенство является *следствием* другого, если множество его решений содержит в себе множество решений второго.

Иными словами, при переходе от одного неравенства к другому — его следствию, мы не должны терять ни одного решения исходного неравенства.

Обычно это оформляется таким рассуждением: пусть верно ... (исходное неравенство), тогда верно ... (его следствие).

Ясно, что каждое из равносильных неравенств является следствием другого.

2. *Стандартные неравенства.*

Решение неравенств (так же как и решение уравнений) обычно распадается на два шага: преобразование неравенства к одному из стандартных; решение стандартного неравенства.

К стандартным неравенствам относятся следующие типы неравенств (из возможных четырех знаков неравенства выбираем один):

1) линейное неравенство

$$ax + b > 0;$$

2) кусочно-линейное неравенство

$$|ax + b| < 0;$$

3) квадратное неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0;$$

4) степенное неравенство

$$x^n > a;$$

5) показательное неравенство

$$a^x > b;$$

6) логарифмическое неравенство

$$\log_a x > b.$$

Линейное неравенство

$$-2x + 3 > x + 5.$$

$$-2x + 3 > x + 5 \Leftrightarrow 3x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Кусочно-линейное неравенство

$$|2x - 3| \le 5.$$

$$|2x - 3| \le 5 \Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \le x \le \frac{3}{2} + \frac{5}{2}.$$

Ответ: $[-1; 4]$.

Квадратное неравенство

$$-2x^2 + 5x - 3 < 0.$$

$-2x^2 + 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 > 0$; корни уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Степенное неравенство

$$x^3 < -1.$$

$$x^3 < -1 \Leftrightarrow x < -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Показательное неравенство

$$2^x \ge -1.$$

Так как левая часть строго положительна, то неравенство выполняется при всех x.

Ответ: x — любое число.

Логарифмическое неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(3 - x) > -1.$$

ОДЗ: $x < 3$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3 - x) > -1 \Leftrightarrow 0 < 3 - x < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 3)$.

Умножение на одну и ту же функцию

- $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1} < \dfrac{2}{5}$. ОДЗ: $x \geq 0$.

Умножим на $x + 1$. Это не нарушает равносильности, так как на ОДЗ $x + 1 > 0$:

$$\sqrt{x} < \frac{2}{5}\ (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{4}{25}(x^2+2x+1), \\ x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 17x + 4 > 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left[0;\ \dfrac{1}{4}\right) \cup (4;\ +\infty)$.

- $\sqrt{x+2} > x$. ОДЗ: $x \geq -2$.

Из трех комбинаций знаков остались две, так как $\sqrt{x+2}$ всегда ≥ 0.

Если $-2 \leq x \leq 0$, то неравенство верно, так как слева стоит положительное число, а справа — отрицательное. Пусть $x \geq 0$:

$$\sqrt{x+2} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < 2.$$

Ответ: $[-2;\ 2)$.

Логарифмирование — потенцирование

- $\log_2(x-1) < \log_2(3-x)$. ОДЗ: $(1;\ 3)$.

$$\begin{cases} x-1 < 3-x, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $(1;\ 2)$.

3. *Переход к следствию.*

Разберем основные трудности, которые встречаются при переходе от неравенства к его следствию:

1) *умножение на одну и ту же функцию* (например, освобождение от знаменателя). Этот прием рекомендуется выполнять лишь при уверенности, что множитель сохраняет постоянный знак (для всех допустимых значений неизвестного). В противном случае лучше перенести все члены в одну часть неравенства и воспользоваться методом интервалов;

2) рассмотрим неравенство $a > b$. Если $b \geq 0$ (тогда $a > 0$), то из неравенства $a > b$ следует неравенство $a^2 > b^2$.

Обратно, из неравенства $a^2 > b^2$ при дополнительных условиях $b \geq 0$, $a \geq 0$ следует неравенство $a > b$.

Пусть теперь $b < 0$.

Если при этом $a \geq 0$, то неравенство $a > b$ верно.

Если же $b < 0$ и $a < 0$, то из неравенства $a^2 < b^2$ следует неравенство $a > b$.

Верно и обратное: из неравенства $a > b$ при соблюдении условий $b < 0$, $a < 0$ следует неравенство $a^2 < b^2$.

Эти рассуждения исчерпывают все возможные случаи (их получилось три: 1) $a \geq 0$ и $b \geq 0$; 2) $b < 0$ и $a \geq 0$; 3) $b < 0$ и $a < 0$);

3) *логарифмирование — потенцирование.* Эти преобразования совершаются с помощью строго монотонных функций, поэтому следить за сохранением равносильности здесь проще — главная трудность связана с сохранением ОДЗ.

4. *Замена неизвестного.* Решая неравенство, часто полезно делать замену неизвестного. При этом, как правило, приходится решать неравенство не на всей его естественной области определения, а на меньшей.

Например, при замене выражения $f(x)$ через y приходим к неравенству $F(y) > 0$.

Последнее неравенство нужно решать не на всей области определения функции F, а на ее пересечении с областью значений функции f.

В чем состоит важнейший метод решения неравенств — метод интервалов?

Метод интервалов — метод нахождения знака выражения (а значит, и решения неравенства) с помощью разбиения ОДЗ выражения на интервалы (промежутки), на каждом из которых выражение сохраняет постоянный знак.

В простейшем виде схема применения метода интервалов в случае, когда выражение раскладывается на линейные множители, выглядит следующим образом:

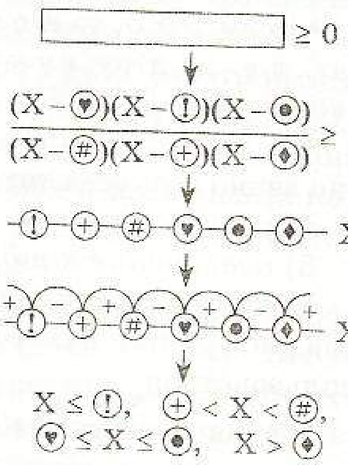
Алгоритм

Разложить на линейные множители

Нанести корни на числовую ось

Расставить знаки на интервалах

Записать ответ



Метод интервалов основан на том, что функция, непрерывная на некотором интервале и не обращающаяся на нем в нуль, сохраняет на этом интервале постоянный знак.

Соображения непрерывности позволяют применять метод интервалов не только к произведению линейных множителей, но и к произведению любых множителей, корни которых известны.

Методом интервалов решаются, прежде всего, рациональные неравенства, т. е. неравенства, в одной части которых стоит рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, а в другой части — нуль.

Разбиение на интервалы применяется не только для решения неравенств, но и для преобразования выражений (необходимых в процессе решения уравнений и неравенств), зависящих от его знака.

Замена неизвестного

$$2^{2x+3} - 2^{x+5} + 14 \ge 0.$$

Замена: $2^{x+1} = z$, ОДЗ: $z > 0$.

$2^{2x+3} - 2^{x+5} + 14 \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2z^2 - 16z + 14 \ge 0,\ z > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^2 - 8z + 7 \ge 0,\ z > 0$; корни 1; 7; $z \in (0; 1] \cup [7; +\infty)$.

$z \in (0; 1] \Leftrightarrow 0 < 2^{x+1} \le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \le -1$; $z \in [7; +\infty) \Leftrightarrow 2^{x+1} \ge 7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \ge -1 + \log_2 7$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [-1 + \log_2 7; +\infty)$.

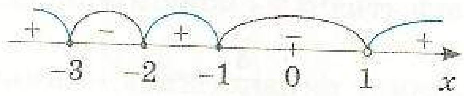
Метод интервалов

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}.$$

Перенесем правую часть влево, приведем к общему знаменателю и разложим на множители числитель дроби:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0.$$



Применяя метод интервалов, с помощью числовой оси решаем неравенство и получаем ответ: $x < -3$, $-2 < x < -1$, $x > 1$.

Его можно записать в виде объединения интервалов.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$.

Возведение неравенства в квадрат

$$\sqrt{x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} \ge \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}.$$

Замечаем, что

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Определяем знак выражения $x^2 - \dfrac{1}{2}$ на интервалах:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} > 0;$$
$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} < 0.$$

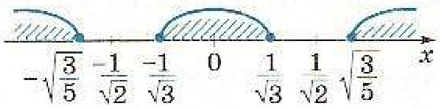
На объединении первых двух интервалов получаем неравенство

$$x^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{3}{5}.$$

На интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ имеем неравенство

$$\frac{1}{2} - x^2 \geq \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Наносим все корни на числовую ось и записываем ответ.



Ответ:

$$\left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right] \cup \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup$$
$$\cup \left[\sqrt{\frac{3}{5}}; +\infty\right).$$

Типичными примерами являются следующие преобразования:

1) *раскрытие модуля*.

Преобразование основано на том, что:

- $|\square| = \square$, если $\square \geq 0$;
- $|\square| = -\square$, если $\square \leq 0$.

Если в процессе преобразований нужно избавиться от модуля, необходимо рассмотреть интервалы, на которых выражение $\square$ сохраняет постоянный знак;

2) *возведение неравенства в квадрат*.

Если неравенство имеет вид $\sqrt{\square} = \bigcirc$, то его полезно рассматривать на отдельных интервалах, где $\bigcirc$ сохраняет постоянный знак:

- если $\bigcirc \geq 0$, то его можно возвести в квадрат, т.е. на этом интервале оно равносильно неравенству $\square \geq \bigcirc^2$;
- если $\bigcirc < 0$, то его и «решать не нужно»: оно верно при всех тех x из ОДЗ, для которых $\bigcirc < 0$;

3) *извлечение квадратного корня*.

Если под знаком радикала стоит полный квадрат, то при извлечении корня можно воспользоваться

- знаком модуля ($\sqrt{x^2} = |x|$);
- применить метод интервалов.

? Вопросы и упражнения

1. Какие неравенства называются равносильными?
2. Какой вид может иметь множество решений линейного неравенства? квадратного неравенства?
3. Какие стандартные неравенства вы знаете? Какими могут быть множества их решений?
4. В чем состоит алгоритм решения рационального неравенства методом интервалов?
5. Какое свойство непрерывной функции используется в методе интервалов?
6. Как применяется метод интервалов для раскрытия модуля?

БЕСЕДА

Разрешимость алгебраических уравнений

Вопросы разрешимости уравнений в радикалах были окончательно решены только в первой половине XIX в. в работах замечательных математиков — итальянца П. Руффини, француза Э. Галуа и норвежца Н. Абеля. Из этих же работ вытекало и решение знаменитых геометрических задач древности. Вопрос о построении циркулем и линейкой был до конца исследован К. Гауссом. Предложенный им способ построения правильного семнадцатиугольника изображен на надгробной плите.

Невозможность решения других знаменитых задач древности имеет следующее объяснение:

1) *трисекция угла* (разделить произвольный угол на три равные части) приводит к кубическому уравнению, корни которого не выражаются с помощью квадратных радикалов;

2) *квадратура круга* (построить квадрат, площадь которого равна площади круга единичного радиуса) сводится к вопросу о том, можно ли число π вычислить с помощью арифметических операций над рациональными числами и извлечения корней. Невозможность этого следует из того, что π не может быть корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами;

3) *удвоение куба* (построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема единичного куба) сводится к выражению корня многочлена $x^3 - 2$ через квадратные радикалы, что невозможно.

В истории решения алгебраических уравнений можно выделить следующие этапы:

- правила решения квадратных уравнений — вавилонские тексты (2 тыс. лет до н. э.);
- «геометрическая алгебра», геометрические приемы решения уравнений — древнегреческие математики (с VI в. до н. э.);
- создание алгебры как науки о решении уравнений, независимой от геометрии, — арабские математики (начиная с VIII в.);
- решение уравнений третьей и четвертой степеней, введение комплексных корней — итальянские математики (XVI в.);
- исследование числа корней уравнения, слияние геометрических и алгебраических методов — французские математики (конец XVI—XVII в.): А. Жирар, Ф. Виет, Р. Декарт, П. Ферма;
- основная теорема алгебры, перевод вопросов решения уравнений в русло математического анализа — французские и немецкие математики (XVIII—начало XIX в.): Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, П. Лаплас, К. Гаусс;

К. Ф. Гаусс
(1777—1855)

Жозеф Луи Лагранж
(1736 — 1813)

Французский математик и механик. Наиболее важные труды Лагранжа относятся к вариационному исчислению, аналитической и теоретической механике. Ему принадлежат также выдающиеся исследования по различным вопросам математического анализа (формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, теория условных экстремумов); теории чисел, алгебре (теория и приложения непрерывных дробей); дифференциальным уравнениям (теория особых решений, метод вариации постоянных); интерполированию, математической картографии, астрономии и др.

- решение вопросов неразрешимых уравнений, создание «современной алгебры» — П. Руффини, Э. Галуа, Н. Абель (первая половина XIX в.).

Ответы

Глава 1

• **Занятие 1**

1. 1, 2, 3, 5, 6. 2. 2, 3, 4.
3. 1) 55 250; 2) 0,706. 4. 4. 5. $t = 98{,}6$ F; $t = 310$ K; $t = 31{,}6$ R.

• **Занятие 2**

7.1) 0,28(0); 3) 0,(285714); 5) 0,5(3).
8. *Указание*: докажите, что дроби не периодические.

• **Занятие 3**

3. *Указание*: используйте неравенство $\sqrt{0{,}99\ldots9} > 0{,}99\ldots9$.
4. 4) и 5) неверно, остальные верны.
5. 2)—5) неверно, остальные верны.

• **Занятие 5**

1. 6) -4; 7) $-3i$; 8) $1 + i$.
2. 1) $(a + b)(a - bi)$; 4) $(x - 1 + i)(x - 1 - i)$; 6) $(x + 2)\ (x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3})$;
8) $(x - 1 + i)(x - 1 - i)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$.
4. 1) i; 1; i; 2) $32i$; 3) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$; $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$; 1; 4) $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.
5. 2), 3), 5) неверны, остальные верны.

Глава 2

• **Занятие 1**

1. 5) $\frac{15}{8}$; 6) 0. 2. 1) a^3b^{-4}; 2) $a^{-8}b^7$.
3. 2) $66^{15} < 1021^{12}$; 3) $501^3 - 399^3 > (501 - 399)^3$.
5. $n = 3$. 6. $x \le 2$. 7. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; R; $[0; +\infty)$; R.

• **Занятие 2**

1. 3) и 4). 2. Не всегда. 3) 0,2; 4) $\sqrt{5} - 2$.
4. 2) $2\sqrt{2008} > \sqrt{2007} + \sqrt{2009}$; 4) одинаковы.
5. 1) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; 3) $-(1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8})$; 4) $\frac{1}{6}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30})$.

• **Занятие 3**

3. 1) $2^{15/18}$; 3) $3^{5/24}$; 4) $a^{-7/4}$; 5) $a^{2/5}$.
4. 1) $2^{-1/3}$, 2^{-1}, $2^{-3/4}$, $2^{2/3}$, 2; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $9^{-1/3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}$, $3^{3/4}$, 3^3.
6. 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) -1; 2; 5) $\frac{1}{3}$; 6) 2.

• **Занятие 4**

1. 2) 2, –1, 0, –3, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; 3) 3, –2, $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$.

2. 3) $\frac{2}{3}+\log_a b+\frac{1}{2}\log_a c-\frac{3}{2}\log_a 3-\log_a d$; 5) $\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\log_a b-\frac{1}{2}\log_a c$.

3. 1) a^3b^2; 3) $\frac{\sqrt{x-1}}{10x^3}$.

4. 2) $0 > \log_{1/3}3$; 4) $0 < \log_{1/3}(1/2)$; 6) $1 < \log_{1/7}(1/8)$; 8) $\log_2 8 > \log_2(1/9)$;
10) $\log_{1/3}(1/5) < \log_{1/3}(1/7)$.

5. $-\log_2 a$, $\frac{1}{3}\log_2 a$, $-\frac{1}{2}\log_2 a$, $2\log_2 a$, $\frac{\log_2 a}{\log_2 3}$.

6. 1) $\frac{1-2a}{a-2}$; 2) $\frac{6+a}{2(6-a)}$; 3) $\frac{4ab+2a+b+1}{2a(3-2b)}$.

• **Занятие 5**

1. 1) 1, 2, 4 возрастают, остальные убывают.
3. 2) 6 и 162; 4) 5 и 13.
4. 3) (–3; 2); 4) $(1; +\infty)$.
5. 1) [1; 3]; 3) [0; 3]; 4) $[0; \lg 2 + 1]$.

• **Занятие 6**

1. 3) $-\frac{3}{2}$; 5) $\frac{8}{3}$; 7) нет решений; 9) lg2; 11) 2 – lg5; 13) 1; 15) 3; 16) 4; 17) $\log_2 38$;
18) –1; 2; 19) нет решений; 20) 4.

2. 4) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 5) **R**; 7) $(-\infty; 2]$.

3. 2) 0,04; 4) –7; 6) 0; 3; 7) 8; 8) 9; 9) нет решений; 10) –1; 12) 27.

4. 1) (1; 101); 2) [–6; 2); 3) $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$; 4) $\left(\frac{3}{2}; 5\right]$; 5) $(-\infty; 4) \cup [8; +\infty)$;
6) $(0; 1] \cup [10; +\infty)$; 7) $\left(2; \sqrt{14}\right]$; 8) $(99; +\infty)$.

Глава 4

• **Занятие 1**

4. 120. 6. 720.

• **Занятие 2**

3. 625. 4. Число вариантов равно 36.

• **Занятие 3**

1. 4950. 2. 4950. 4. 12. 5. 120. 6. 512. 7. 19683. 8. 35.
9. Если допускать пустые карманы, то 66. 10. 59049.

Глава 6

• **Занятие 1**

1. 1), 2), 4), 6), 8), 10) неверны, остальные верны.

• **Занятие 2**

7. 1) $\cos t=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg} t=-\frac{1}{2}$; $\operatorname{ctg} t=-2$; 3) $\cos t=-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\sin t=-\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{ctg} t=\frac{1}{3}$.

• **Занятие 3**

1. 7) 1; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

• **Занятие 5**

10. 2) $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi n$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; 6) πn; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; 9) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Глава 7

• **Занятие 1**

10. 1) неверно; 2) верно.

• **Занятие 2**

1. Нет. **2.** Да (если не требовать непрерывности) **3.** Нет (если не требовать непрерывности). **4.** Да. **5.** Да. **6.** Да. **7.** Да, если $f(x)=\mathrm{const}$. **8.** Да. **9.** 1) и 3) верны, 2) нет.

• **Занятие 3**

8. $\pi-\arcsin x$.

9. 1) $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x^2+1}$; $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x^2}+1$;

2) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ x^2-1, & |x|>1;\end{cases}$ $(g\circ f)(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0,\\ x^2-1, & x>0.\end{cases}$

• **Занятие 5**

1. а) Да; б) нет. **2.** а) Нет; б) да. **3.** а) Нет; б) да. **4.** а) Да; б) да. **5.** а) Да; б) нет. **6.** а) Да; б) нет. **7.** а) Нет; б) да. **8.** а) Да; б) нет. **9.** а) Нет; б) да. **10.** а) Нет; б) нет. **11.** а) Да; б) да. **12.** а) Да; б) да. **13.** а) Нет; б) нет. **14.** а) Нет; б) нет. **15.** а) Нет; б) да. **16.** а) Нет; б) да. **17.** а) Да; б) да. **18.** а) Нет; б) да. **19.** а) Нет; б) нет. **20.** а) Да; б) нет. **21.** а) Нет; б) да. **22.** а) Нет; б) да. **23.** а) Нет; б) да. **24.** а) Да; б) да.

Глава 8

• **Занятие 2**

2. 3) $h=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.** 1) 2; 2) 5. **4.** $d=\sqrt{\frac{k^2+m^2+l^2}{2}}$.

• **Занятие 3**

3. 1) $h=a\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $S=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **4.** 1) $\frac{45}{4}$; 2) 25; 3) $\frac{35}{4}$.

• **Занятие 4**

2. 1) 4; 2) 4; 3) 5; 5) 2π.

• **Занятие 5**

2. $\frac{1}{\sqrt{6}}a$; $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; $\frac{1}{\sqrt{2}}a$. **3.** У куба 9, у тетраэдра 3.

Глава 11

• **Занятие 2**

1. При $k=0$ и $k=10$ ОДЗ наименьшая, при $k=5$ — наибольшая.

2. $\left(\frac{1}{6}\right)^5$; $\left(\frac{5}{6}\right)^5$; $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

Оглавление

Учебное издание

Башмаков Марк Иванович

Математика

Учебник

Редактор *Л. В. Честная*
Технический редактор *Н. И. Горбачева*
Компьютерная верстка: *А. В. Бобылева*
Корректоры *Г. Н. Петрова*, *В. А. Жилкина*

Изд. № 109113798. Подписано в печать 06.12.2013. Формат 70×100/16.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. л. 20,8. Тираж 15 000 экз. Заказ № 35077.

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. АЕ51. Н 16476 от 05.04.2013.

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

МАТЕМАТИКА

Учебник

ISBN 978-5-4468-0742-0

9 785446 807420

Издательский центр «Академия»
www.academia-moscow.ru